

5.1. Пусть X, Y — топологические векторные пространства. Докажите, что

- (а) линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ непрерывен \iff он непрерывен в нуле;
 (б) множество $\mathcal{L}(X, Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y — векторное подпространство в пространстве $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y .

5.2. На каких из следующих топологических векторных пространств существует хотя бы одна непрерывная норма?

- (а) \mathbb{K}^X (где X — множество); (б) $C(X)$ (где X — метризуемое топологическое пространство);
 (с) пространство голоморфных функций $\mathcal{O}(U)$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, снабженное топологией, унаследованной из $C(U)$;
 (д) $C^\infty[a, b]$; (е) $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество; (ф) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5.3. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P , нормируемо тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему конечному подсемейству.

5.4. (а)-(ф) Какие пространства из задачи 5.2 нормируемы?

5.5. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P , метризуемо тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему не более чем счетному подсемейству.

Указание. Если $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность полунорм, то функция

$$\rho(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

удовлетворяет неравенству треугольника.

5.6. (а)-(ф) Какие пространства из задачи 5.2 метризуемы?

5.7-В. Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые два семейства полунорм, каждое из которых задает хаусдорфову топологию, эквивалентны.

5.8. Пусть X — множество. Докажите, что для любой функции $f \in \mathbb{K}^X$ оператор умножения $M_f: \mathbb{K}^X \rightarrow \mathbb{K}^X$, $M_f(g) = fg$, непрерывен.

5.9. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Докажите, что любой линейный дифференциальный оператор $\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D^\alpha$ в пространстве $C^\infty(U)$ (где $a_\alpha \in C^\infty(U)$) непрерывен.

5.10. Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Для $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Докажите, что топология компактной сходимости на $\mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ порождается любым из следующих эквивалентных семейств полунорм:

(а) $\{\|\cdot\|_r : 0 < r < R\}$, где $\|f\|_r = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)|r^n$.

(б) $\{\|\cdot\|_{r,\infty} : 0 < r < R\}$, где $\|f\|_{r,\infty} = \sup_{n \geq 0} |c_n(f)|r^n$.

(с)-В $\{\|\cdot\|_{r,p}^I : 0 < r < R\}$, где $\|f\|_{r,p}^I = \left(\int_{|z|=r} |f(z)|^p d\mu(z) \right)^{1/p}$, μ — мера длины на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ и $p \in [1, +\infty)$.

5.11-В. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Докажите, что топология компактной сходимости на $\mathcal{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.

5.12-В. Пространство *быстро убывающих последовательностей* $s(\mathbb{Z})$ определяется так:

$$s(\mathbb{Z}) = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \|x\|_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| |n|^k < \infty \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Топология на $s(\mathbb{Z})$ порождается последовательностью полунорм $\{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Снабдите пространство $C^\infty(\mathbb{T})$ топологией (по аналогии с $C^\infty[a, b]$) и постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{T}) \cong s(\mathbb{Z})$. (*Указание:* сопоставьте каждой функции из $C^\infty(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье.)

5.13. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара векторных пространств. Докажите, что

- (a) $\dim X < \infty \iff \dim Y < \infty \iff$ слабая топология $\sigma(X, Y)$ нормируема;
- (b) слабая топология $\sigma(X, Y)$ метризуема \iff размерность Y не более чем счетна;
- (c) слабая топология на бесконечномерном нормированном пространстве и слабая* топология на пространстве, сопряженном к бесконечномерному банахову пространству, неметризуемы.

5.14. Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространстве \mathbb{K}^X (где X — множество) и докажите, что слабая топология на пространстве \mathbb{K}^X совпадает с исходной.

5.15. Пусть e_n — числовая последовательность с единицей на n -м месте и нулем на остальных. Исследуйте последовательность (e_n) на слабую сходимость в пространствах c_0 и ℓ^p ($1 \leq p < \infty$).

5.16. Пусть T_ℓ и T_r — операторы левого и правого сдвига в ℓ^2 . Исследуйте последовательности $(T_\ell^n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(T_r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ на сходимость (a) по норме в $\mathcal{B}(\ell^2)$; (b) в сильной операторной топологии на $\mathcal{B}(\ell^2)$; (c) в слабой операторной топологии на $\mathcal{B}(\ell^2)$.

5.17. Пусть X и Y — нормированные пространства. Обозначим через SOT, WOT и NT соответственно сильную операторную топологию, слабую операторную топологию и топологию, задаваемую операторной нормой на $\mathcal{B}(X, Y)$. Докажите, что (a) $\text{WOT} \subset \text{SOT} \subset \text{NT}$; (b) если Y бесконечномерно, то $\text{WOT} \neq \text{SOT}$; (c) если X бесконечномерно, то $\text{SOT} \neq \text{NT}$.

5.18. Приведите пример разрывного линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП X и Y , который непрерывен относительно слабых топологий на X и Y .

5.19. (a) Приведите пример банахова пространства X и векторного подпространства $Y \subset X^*$, которое замкнуто по норме, но не замкнуто в слабой* топологии.

(b) Докажите, что если X нерефлексивно, то такое Y , как в п. (a), обязательно существует.

5.20-В. Докажите, что в пространстве ℓ^1 всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.