4.1. Докажите, что для линейного оператора $T\colon X \to Y$ между конечномерными векторными пространствами X и Y справедливо равенство $\operatorname{ind} T = \dim X - \dim Y$.

4.2 (*этот результат использовался на лекции при доказательстве аддитивности индекса*)**.** Пусть $0 \to X^0 \to X^1 \to \ldots \to X^n \to 0$ — точная последовательность конечномерных векторных пространств. Докажите, что $\sum_i (-1)^i \dim X^i = 0$.

4.3. Что можно сказать об операторе, который компактен и фредгольмов одновременно?

4.4. Пусть $a_0, \ldots, a_n \in C^p[a,b]$. Докажите, что оператор

$$D\colon C^{p+n}[a,b] \to C^p[a,b], \quad D(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

фредгольмов, и вычислите его индекс.

4.5. Докажите, что оператор $D\colon C^1(S^1) \to C(S^1)$, $D(f) = f'$ фредгольмов, и вычислите его индекс.

4.6. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть M_λ — соответствующий диагональный оператор в ℓ^p или в c_0. Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_λ. Вычислите его индекс.

4.7. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_f. Вычислите его индекс.

4.8. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для фредгольмовости M_f. Вычислите его индекс.

4.9. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ в H существует фредгольмов оператор индекса n.

4.10. Пусть X — банахово пространство, $T \in \mathscr{B}(X)$, $K \in \mathscr{K}(X)$ и $S = T + K$.
(a) Докажите, что если $\lambda \in \sigma(T)$ не является собственным значением T конечной кратности, то $\lambda \in \sigma(S)$.
(b) Докажите, что если T — сдвиг в $\ell^2(\mathbb{Z})$, то K можно подобрать так, что $\sigma(S) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ (в то время как $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$).

4.11 (*классические теоремы Фредгольма*)**.** Пусть $I = [a,b]$. Введем билинейную форму на $C(I)$ формулой $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg\,dt$. Для каждой функции $K \in C(I \times I)$ определим функцию $K' \in C(I \times I)$ формулой $K'(x,y) = K(y,x)$. Пусть $T_K\colon C(I) \to C(I)$ — интегральный оператор, действующий по формуле

$$(T_K f)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy.$$

Положим $S_K = \mathbf{1} - T_K$. Докажите следующие утверждения:
(a) $f \in \operatorname{Im} S_K \iff \langle f, g\rangle = 0 \quad \forall g \in \operatorname{Ker} S_{K'}$.
(b) $\dim \operatorname{Ker} S_K = \dim \operatorname{Ker} S_{K'} < \infty$.
Указание. Продолжите операторы S_K и $S_{K'}$ на $L^2(I)$ и воспользуйтесь теоремами Фредгольма в формулировке Шаудера (см. лекцию).

4.12. Для каждого из следующих операторов T найдите $\sigma_{\text{ess}}(T)$ и вычислите $\operatorname{ind}(T - \lambda\mathbf{1})$ для всевозможных $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(T)$: **(a)** диагональный оператор в ℓ^p или в c_0; **(b)** оператор умножения на непрерывную функцию в $C[a,b]$ или на ограниченную измеримую функцию в $L^p[a,b]$; **(c)** оператор левого сдвига в ℓ^p или в c_0; **(d)** оператор правого сдвига в ℓ^p или в c_0; **(e)** оператор двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$; **(f)** произвольный компактный оператор.

4.13 (*еще одно доказательство аддитивности индекса*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства и $T: X \to Y$, $S: Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Рассмотрите оператор

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_Y & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_Y \cos t & -\mathbf{1}_Y \sin t \\ \mathbf{1}_Y \sin t & \mathbf{1}_Y \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_Y \end{pmatrix},$$

действующий из $X \oplus Y$ в $Y \oplus Z$, и, пользуясь непрерывностью индекса, получите еще одно доказательство формулы $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.

4.14-B (*и еще одно доказательство аддитивности индекса; Д. Сарасон, 1987*)**.** Пусть X, Y, Z — векторные пространства, $T: X \to Y$ и $S: Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Постройте разложения $X = X_0 \oplus X_1$, $Y = Y_0 \oplus Y_1$ и $Z = Z_0 \oplus Z_1$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) X_0, Y_0 и Z_0 конечномерны;
2) $T(X_i) \subseteq Y_i$ и $S(Y_i) \subseteq Z_i$ $(i = 0, 1)$;
3) T — изоморфизм X_1 на Y_1, а S — изоморфизм Y_1 на Z_1.

Из существования таких разложений выведите, что формулу $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$ достаточно доказать для операторов между конечномерными пространствами. Докажите эту формулу. (*Подсказка:* $X_0 = T^{-1}(\operatorname{Ker} S)$.)

4.15. (a) Пусть H — гильбертово пространство. Примем пока на веру утверждение о том, что группа $\mathrm{GL}(H)$ обратимых ограниченных операторов в H линейно связна[1] (через некоторое время мы сможем ее доказать). Докажите, что фредгольмовы операторы $S, T \in \mathscr{B}(H)$ лежат в одной связной компоненте множества $\mathsf{Fred}(H)$ $\iff$ их можно соединить непрерывным путем в $\mathsf{Fred}(H)$ $\iff$ $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$.
(b) Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство и $\mathcal{Q}(H) = \mathscr{B}(H)/\mathscr{K}(H)$ — алгебра Калкина. Обозначим через G группу обратимых элементов в $\mathcal{Q}(H)$, а через $G_0 \subset G$ связную компоненту единицы. Докажите, что фредгольмов индекс индуцирует изоморфизм групп $G/G_0 \cong \mathbb{Z}$.

4.16-B. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, и пусть T_f — соответствующий оператор Тёплица в пространстве Харди $H^2(\mathbb{T})$. Напомним (см. лекцию), что если f не обращается в нуль, то T_f фредгольмов.
(a) Предположим, что $f(z) = 0$ для некоторого $z \in \mathbb{T}$. Докажите, что T_f не фредгольмов.
(b) Найдите $\sigma_{\mathrm{ess}}(T_f)$ в терминах f.
(c) Найдите $\|T_f\|$ в терминах f.

4.17-B. Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.
Указание. Можно действовать следующим образом:
1) Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).
2) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.
3) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

[1] На самом деле можно сказать больше: если H бесконечномерно, то группа $\mathrm{GL}(H)$ стягиваема, т.е. гомотопически эквивалентна точке (теорема Кюйпера). См. добавление к книге М. Атья «Лекции по K-теории», М.: Мир, 1967.