

1. Двойственность для банаховых пространств

1. Топологически инъективные операторы, открытые операторы, изометрии, коизометрии. Критерии топологической инъективности и открытости оператора.
2. Факторпространства нормированных пространств. Универсальное свойство факторпространств и его следствия. Полнота факторпространств.
3. Сопряженное (двойственное) пространство, сопряженный (двойственный) оператор. Примеры. Каноническое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Рефлексивность. Примеры рефлексивных и нерефлексивных банаховых пространств.
4. Аннуляторы, преданнуляторы и их свойства. Совпадение преданнулятора аннулятора подмножества с замыканием его линейной оболочки. Описание сопряженных к подпространствам и к факторпространствам.
5. Двойственность между инъективными операторами и операторами с плотным образом. Двойственность между топологически инъективными и сюръективными операторами. Теорема о замкнутом образе (эквивалентность замкнутости образа оператора и образа его сопряженного). Лемма Джонсона о точных последовательностях банаховых пространств.

2. Элементарная спектральная теория

6. Спектр элемента алгебры. Спектры элементов алгебр \mathbb{C}^X , $\ell^\infty(X)$, $L^\infty(X, \mu)$. Поведение спектра при гомоморфизмах. Спектрально инвариантные подалгебры.
7. Теорема об отображении спектра для многочленов. Спектр обратного элемента.
8. Банаховы алгебры; примеры. Свойства группы обратимых элементов банаховой алгебры. Компактность спектра элемента банаховой алгебры.
9. Резольвентная функция и ее свойства. Непустота спектра элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда–Мазура.
10. Спектральный радиус. Формула Бёрлинга–Гельфанда.
11. Описание спектра оператора умножения на функцию в $L^p(X, \mu)$ и спектра оператора сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$.
12. Части спектра линейного оператора (точечный, непрерывный и остаточный спектры). Описание частей спектра диагонального оператора.
13. Спектр сопряженного оператора. Включения между частями спектра оператора и частями спектра его сопряженного. Описание частей спектра для операторов левого и правого сдвига в ℓ^p (рефлексивный случай).

3. Фредгольмовы операторы

14. Фредгольмовы операторы. Простейшие примеры. Замкнутость образа фредгольмова оператора (лемма Като).
15. Фредгольмов индекс. Фредгольмовость и индекс сопряженного оператора. Аддитивность индекса.
16. Теорема Шаудера о компактности сопряженного оператора.
17. Подъем и спуск линейного оператора; их свойства. Теорема Рисса об операторах вида “ $1 +$ компактный”. Альтернатива Фредгольма.
18. Свойства спектра компактного оператора.
19. Критерий фредгольмовости Никольского–Аткинсона. Алгебра Калкина. Существенный спектр, его компактность и непустота.
20. Открытость множества фредгольмовых операторов и локальная постоянность индекса.
21. Сохранение фредгольмовости и индекса при компактных возмущениях. Теорема Никольского о фредгольмовых операторах индекса 0.
22. Операторы Тёплица и геометрическая интерпретация их индекса.

4. Локально выпуклые пространства и слабые топологии

23. Топологические векторные пространства. Топология, порожденная семейством полунорм. Непрерывность алгебраических операций, описание сходящихся последовательностей, критерий хаусдорфовости такой топологии. Локально выпуклые пространства и их «полинормируемость» (без доказательства). Примеры (пространства непрерывных и гладких функций, пространство Шварца, сильная и слабая операторные топологии).
24. Критерий непрерывности полунормы на локально выпуклом пространстве. Критерий непрерывности линейного оператора в терминах полунорм. Критерий мажорирования одного семейства полунорм другим. Наличие достаточного количества непрерывных линейных функционалов на хаусдорфовом локально выпуклом пространстве.
25. Дуальные пары и слабые топологии. Описание линейных функционалов, непрерывных в слабой топологии. Критерий рефлексивности банахова пространства в терминах топологий на его сопряженном.
26. Двойственные операторы между пространствами дуальных пар. Критерий существования двойственного оператора. Эквивалентность непрерывности и слабой непрерывности оператора между нормированными пространствами.
27. Аннуляторы подмножеств в дуальных парах, их свойства. Теорема о двойном аннуляторе и ее следствия.
28. Равностепенная непрерывность. Теорема Банаха–Алаоглу–Бурбаки.

5. Спектральная теория самосопряженных операторов

32. Оператор, сопряженный к оператору между гильбертовыми пространствами. Основные свойства операции перехода к сопряженному оператору. C^* -тождество. Связь свойств оператора между гильбертовыми пространствами со свойствами его сопряженного.
33. Вещественность спектра самосопряженного оператора. Совпадение нормы нормального оператора с его спектральным радиусом. Инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству самосопряженного оператора.
34. $*$ -алгебры, банаховы $*$ -алгебры, C^* -алгебры. Примеры. Непрерывность $*$ -представлений банаховых $*$ -алгебр. Непрерывное исчисление от самосопряженного оператора (существование, единственность, изометричность). Примеры.
35. Теоремы об отображении спектра и о композиции для непрерывного исчисления.
36. Полунепрерывность спектра. Теоремы о непрерывности непрерывного исчисления от самосопряженного оператора.
37. Положительные операторы. Теорема о квадратном корне из положительного оператора. Характеризации положительных операторов. Свойства множества положительных операторов. Отношение порядка на самосопряженных операторах. Разложение самосопряженного оператора в разность положительных.
38. Алгебраические характеристики изометрий, коизометрий, унитарных операторов и ортогональных проекторов. Частичные изометрии и их алгебраическая характеристика.
39. Полярное разложение операторов в гильбертовом пространстве. Единственность полярного разложения. Приложение: деформационная ретракция $GL(H)$ на $U(H)$.
40. Слабо-мерная топология на алгебре $B(X)$ ограниченных борелевских функций и слабая операторная топология на $\mathcal{B}(H)$. Раздельная непрерывность умножения в этих топологиях. Слабо-мерная плотность $C(X)$ в $B(X)$.
41. Связь между операторами в гильбертовом пространстве и полуторалинейными формами.
42. Продолжение $*$ -представлений алгебры $C(X)$ на алгебру $B(X)$ ограниченных борелевских функций. Борелевское исчисление от самосопряженного оператора.
43. $*$ -модули над банаховыми $*$ -алгебрами. Циклические $*$ -модули. Примеры. Теорема о функциональной модели циклического $C(X)$ - $*$ -модуля. Следствие: теорема о функциональной модели самосопряженного циклического оператора.
44. Гильбертовы суммы $*$ -модулей. Разложение $*$ -модуля на циклические слагаемые. Теоремы о функциональной модели для $C(X)$ - $*$ -модулей и (как следствие) для самосопряженных операторов.
45. Спектральные меры. Интеграл по спектральной мере. Регулярные спектральные меры. Спектральное разложение для $*$ -представлений алгебры $C(X)$ и (как следствие) для самосопряженных операторов.