

13.1. Пусть X и Y — полунормированные пространства. Постройте изометрическое линейное отображение

$$X \otimes_{\varepsilon} Y \rightarrow \mathcal{L}(X', Y), \quad x \otimes y \mapsto (f \mapsto f(x)y)$$

(оно использовалось на лекции при доказательстве совпадения \otimes_{π} и \otimes_{ε} для ядерных пространств).

13.2. Пусть $0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow 0$ — точная последовательность пространств Фреше и Y — пространство Фреше. Предположим, что X_1 ядерно. Докажите, что последовательность

$$0 \rightarrow X_1 \widehat{\otimes}_{\pi} Y \rightarrow X_2 \widehat{\otimes}_{\pi} Y \rightarrow X_3 \widehat{\otimes}_{\pi} Y \rightarrow 0$$

точна. (На лекции это утверждение было доказано в предположении, что X_2 или Y ядерно.)

13.3. Пусть $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$ — точная последовательность пространств Фреше и Y — пространство Фреше. Предположим, что X_2 или Y ядерно. Докажите, что последовательность

$$X_1 \widehat{\otimes}_{\alpha} Y \rightarrow X_2 \widehat{\otimes}_{\beta} Y \rightarrow X_3 \widehat{\otimes}_{\gamma} Y$$

точна для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \{\pi, \varepsilon\}$.

13.4. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство X бочечно тогда и только тогда, когда его топология есть $\beta(X, X')$.

13.5. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство X бочечно тогда и только тогда, когда каждое ограниченное подмножество в X'_{σ} равномерно непрерывно.

13.6. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство X квазибочечно тогда и только тогда, когда каждое ограниченное подмножество в X'_{β} равномерно непрерывно.

13.7. Докажите, что хаусдорфово квазибочечное локально выпуклое пространство X является пространством Макки (это означает, что его топология есть $\tau(X, X')$). Приведите пример хаусдорфова локально выпуклого пространства, не являющегося пространством Макки.

13.8. Хаусдорфово локально выпуклое пространство называется *квазиполным*, если все его замкнутые ограниченные подмножества полны. Докажите, что для квазиполных пространств свойства бочечности, квазибочечности и борнологичности эквивалентны.