12.1. Пусть $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — непрерывные линейные операторы между банаховыми пространствами. Докажите, что если T или S ядерный, то и ST ядерный.

12.2. Пусть $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ и $1/p+1/q=1$. Обозначм через $e_n \in \ell^p$ последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных, и положим $D = \overline{\mathrm{span}}\{e_n \otimes e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^p \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} \ell^q$. Постройте изометрический изоморфизм $D \cong \ell^1$.

12.3. Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $X = c_0$. Для $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$ рассмотрим диагональный оператор

$$M_\alpha\colon X \to X, \qquad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots).$$

Докажите, что M_α ядерный тогда и только тогда, когда $\alpha \in \ell^1$, и что его ядерная норма равна $\sum_n |\alpha_n|$.

12.4. Пусть $I = C[a,b]$ и $K \in C(I \times I)$. Докажите, что интегральный оператор

$$T\colon C(I) \to C(I), \qquad (Tf)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy$$

является ядерным.

12.5. Пусть T — непрерывный линейный оператор в пространстве ℓ^1 с матрицей (a_{ij}) в стандартном базисе (e_j) (т.е. $Te_j = \sum_i a_{ij} e_i$ для всех $j \in \mathbb{N}$). Сформулируйте условие на (a_{ij}), необходимое и достаточное для его ядерности, и вычислите его ядерную норму в терминах чисел a_{ij}.

12.6. Сделайте то же, что в предыдущей задаче, для пространства c_0.

12.7. Пусть Y — банахово пространство, $Z \subset Y$ — замкнутое векторное подпространство. Предположим, что для некоторого банахова пространства X отображение $Z \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} X^* \to Y \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} X^*$, порожденное вложением $Z \hookrightarrow Y$, не является топологически инъективным (примеры такого рода приведены в задачах 11.8–11.10). Предположим также, что каноническое отображение $Y \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} X^* \to \mathscr{L}(X,Y)$ инъективно. Докажите, что существует ядерный оператор из X в Y, образ которого содержится в Z, но который не является ядерным как оператор из X в Z.

12.8. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, причем X борнологическое, а Y полное (при этих условиях пространство $\mathscr{L}_b(X,Y)$ полно — см. лекцию). Докажите существование непрерывного линейного отображения

$$Y \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} X'_\beta \to \mathscr{L}_b(X,Y), \quad x \otimes f \mapsto f(\,\cdot\,)x, \tag{1}$$

и докажите, что всякий ядерный оператор из X в Y лежит в его образе.

12.9. Пусть $X = Y = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Докажите, что не всякий оператор из образа канонического отображения (1) является ядерным.

12.10. Пусть M — комплексное многообразие[1] и $U \subset M$ — открытое относительно компактное множество. Докажите, что отображение ограничения $\mathscr{O}(M) \to \mathscr{O}(U)$ ядерно.

12.11. Пусть X и Y — векторные пространства, $B \subset X$ — банахов диск и $\varphi\colon X \to Y$ — линейное отображение. Докажите, что $\varphi(B)$ — банахов диск.

[1] Для простоты можете считать, что это открытое подмножество в $\mathbb{C}$.

12.12. Пусть X — локально выпуклое пространство и $B \subset X$ — абсолютно выпуклое ограниченное множество. Докажите, что
(a) вложение $j_B \colon X_B \to X$ непрерывно;
(b) если X хаусдорфово, то X_B — нормированное пространство;
(c) если X хаусдорфово, а B полно (как подмножество X), то B — банахов диск.

12.13. Пусть X — локально выпуклое пространство, p — непрерывная полунорма на X. Положим $B_p = \{f \in X' : |f(x)| \leqslant 1 \ \forall x \in U_p\}$. Докажите, что B_p — банахов диск в X', и постройте изометрический изоморфизм $(X')_{B_p} \cong (X_p)'$.

12.14. Пусть φ_1 и φ_2 — ядерные операторы между локально выпуклыми пространствами. Докажите, что операторы $\varphi_1 \otimes_\pi \varphi_2$ и $\varphi_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} \varphi_2$ ядерны.

12.15. Пусть $\varphi \colon X \to Y$ — ядерный оператор между локально выпуклыми пространствами. Докажите, что оператор $\varphi' \colon Y'_\beta \to X'_\beta$ ядерный.

12.16. Докажите, что полное локально выпуклое пространство X ядерно тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $X \cong \varprojlim(X_i, \varphi_{ij})$, где X_i — банаховы пространства, а отображения φ_{ij} ядерны при всех $i < j$.

12.17. Пусть S^n — n-мерная сфера, $p \in S^n$ — фиксированная точка. Постройте топологический изоморфизм

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \cong \{f \in C^\infty(S^n) : Df(p) = 0 \quad \forall D \in A\},$$

где A — алгебра линейных операторов в пространстве $C^\infty(S^n)$, порожденная векторными полями. Отсюда (см. лекцию) следует ядерность пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

12.18. Докажите, что сильнейшее локально выпуклое пространство несчетной размерности неядерно. Как следствие, несчетная прямая сумма ядерных пространств может не быть ядерной.