В этом листке используются следующие обозначения:

- $\mathsf{LCS}$ — категория локально выпуклых пространств с непрерывными линейными отображениями в качестве морфизмов;
- $\mathsf{LCS}_h$, $\widetilde{\mathsf{LCS}}$, $\mathsf{Fr}$ — полные подкатегории в $\mathsf{LCS}$, состоящие из хаусдорфовых пространств, полных пространств и пространств Фреше соответственно;
- $\mathsf{SNorm}_1$ — категория полунормированных пространств, морфизмы в которой — непрерывные линейные отображения, не увеличивающие норму.

**11.1.** Докажите, что ядром морфизма $\varphi\colon X \to Y$ в любой из перечисленных категорий является подпространство $\varphi^{-1}(0)$ с топологией (или, смотря по смыслу, полунормой), унаследованной из $X$.

**11.2.** Докажите, что коядром морфизма $\varphi\colon X \to Y$ является

(i) в категориях $\mathsf{LCS}$ и $\mathsf{SNorm}_1$ — пространство $Y/\varphi(X)$;
(ii) в категориях $\mathsf{LCS}_h$ и $\mathsf{Fr}$ — пространство $Y/\overline{\varphi(X)}$;
(iii) в категории $\widetilde{\mathsf{LCS}}$ — пространство $(Y/\varphi(X))^{\sim}$.

**11.3.** Докажите, что морфизм $\varphi\colon X \to Y$ в категории $\mathsf{SNorm}_1$ является ядром тогда и только тогда, когда он инъективен и изометричен, а коядром — тогда и только тогда, когда он коизометричен (т.е. отображает открытый единичный шар пространства $X$ на открытый единичный шар пространства $Y$).

**11.4.** Докажите, что морфизм $\varphi\colon X \to Y$ в категории $\mathsf{LCS}$ или $\mathsf{Fr}$ является ядром тогда и только тогда, когда он топологически инъективен, а коядром — тогда и только тогда, когда он открыт (для категории $\mathsf{Fr}$ это равносильно сюръективности).

**11.5.** Докажите, что морфизм $\varphi\colon X \to Y$ в категории $\mathsf{LCS}_h$ является ядром тогда и только тогда, когда он топологически инъективен и имеет замкнутый образ, а коядром — тогда и только тогда, когда он открыт.

**11.6.** Докажите, что морфизм $\varphi\colon X \to Y$ в категории $\widetilde{\mathsf{LCS}}$ является ядром тогда и только тогда, когда он топологически инъективен, а коядром — тогда и только тогда, когда он строгий и имеет плотный образ.

**11.7.** Докажите, что в категории $\mathsf{Fr}$ строгий морфизм с плотным образом сюръективен (это означает, что он является коядром в $\mathsf{Fr}$ тогда и только тогда, когда он является коядром в $\widetilde{\mathsf{LCS}}$).

**11.8** ($\otimes_\pi$ *не сохраняет вложения*)**.** Пусть $X$ — банахово пространство, $Y \subset X$ — замкнутое недополняемое подпространство, обладающее предсопряженным $Z$ (последнее означает, что $Z^*$ топологически изоморфно $Y$). Докажите, что отображения $Y \otimes_\pi Z \to X \otimes_\pi Z$ и $Y \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} Z \to X \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} Z$, индуцированные вложением $Y \hookrightarrow X$, не являются топологически инъективными.

**11.9.** Пусть $X$ — банахово пространство и $Y \subset X$ — дополняемое подпространство. Положим

$$\lambda(Y, X) = \inf\{\|P\| : P \text{ — непрерывный проектор } X \text{ на } Y\}.$$

Предположим, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ заданы банахово пространство $X_n$ и конечномерное подпространство $Y_n \subset X_n$, для которых $\lambda(Y_n, X_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Обозначим через $X$ $\ell^1$-сумму всех $X_n$, а через $Y$ — $\ell^1$-сумму всех $Y_n$. Докажите, что $X$ и $Y$ удовлетворяют условиям задачи 11.8.

**11.10.** Положим $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Группа $\mathbb{T}$ действует на пространстве $C(\mathbb{T})$ посредством регулярного представления: $(z \cdot f)(\zeta) = f(\zeta z)$ для $f \in C(\mathbb{T})$, $z, \zeta \in \mathbb{T}$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию $\chi_k \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $\chi_k(z) = z^k$, и для $n \in \mathbb{N}$ положим $Y_n = \operatorname{span}\{\chi_k : -n \leqslant k \leqslant n\} \subset C(\mathbb{T})$. Пусть $P$ — какой-либо непрерывный проектор из $C(\mathbb{T})$ на $Y_n$. Определим оператор $Q \colon C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ формулой

$$Qf = \int_{\mathbb{T}} (z \cdot P \cdot z^{-1})(f)\, d\mu(z)$$

(*усреднение* $P$), где $\mu$ — мера длины на $\mathbb{T}$, нормированная таким образом, чтобы $\mu(\mathbb{T}) = 1$. Докажите, что

**(a)** $Q$ — проектор $C(\mathbb{T})$ на $Y_n$;

**(b)** $\|Q\| \leqslant \|P\|$;

**(c)** $Q(z \cdot f) = z \cdot Q(f)$ для всех $z \in \mathbb{T}$ и $f \in C(\mathbb{T})$;

**(d)** существует только один проектор $Q = Q_n$ с образом $Y_n$, обладающий свойством (c), и этот проектор сопоставляет каждой функции $f \in C(\mathbb{T})$ $n$-ю частичную сумму ее тригонометрического ряда Фурье, т.е. $Q_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\chi_k$, где $c_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f \bar{\chi}_k \, d\mu$;

**(e)** для всех $f \in C(\mathbb{T})$ справедливо равенство $Q_n f = D_n * f$, где $D_n = \sum_{k=-n}^{n} \chi_k$ — $n$-ое ядро Дирихле, а свертка $f * g$ функций $f, g \in C(\mathbb{T})$ определяется формулой

$$(f * g)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) g(\zeta^{-1} z)\, d\mu(\zeta);$$

**(f)** $\lambda(Y_n, C(\mathbb{T})) = \|Q_n\| = \int_{\mathbb{T}} |D_n|\, d\mu \to \infty$ при $n \to \infty$.

Таким образом, пространства $X_n = C(\mathbb{T})$ и $Y_n$ удовлетворяют условиям задачи 11.9.

**11.11.** Пусть $X$ и $Z$ — банаховы пространства, $Y \subset X$ — замкнутое подпространство. Предположим, что отображение $i \otimes \mathbf{1} \colon Y \otimes_\pi Z \to X \otimes_\pi Z$, индуцированное вложением $i \colon Y \hookrightarrow X$, не является топологически инъективным (как в задаче 11.8). Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся конечномерные подпространства $X_n \subset X$ и $Z_n \subset Z$ и элемент $u \in Y_n \otimes_\pi Z_n$ (где $Y_n = Y \cap X_n$), такие, что $\|u\|_{X_n \otimes_\pi Z_n} \leqslant n^{-1} \|u\|_{Y_n \otimes_\pi Z_n}$.

**11.12** ($\otimes_\varepsilon$ *не сохраняет факторотображения*)**.** Постройте сюръективное непрерывное линейное отображение $X \to Y$ банаховых пространств и банахово пространство $Z$, для которых индуцированное отображение $X \otimes_\varepsilon Z \to Y \otimes_\varepsilon Z$ не открыто, а индуцированное отображение $X \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} Z \to Y \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} Z$ не сюръективно.