10.1. Для нормированного пространства X обозначим через X_1^n пространство X^n с нормой $\|x\| = \sum \|x_i\|$, а через X_∞^n — пространство X^n с нормой $\|x\| = \max \|x_i\|$ (где $x = (x_1, \ldots, x_n)$).
(a) Постройте изометрические изоморфизмы $(X_1^n)' \cong (X')_\infty^n$ и $(X_\infty^n)' \cong (X')_1^n$.
(b) Постройте изометрические изоморфизмы $\mathbb{K}_1^n \otimes_\pi X \cong X_1^n$ и $\mathbb{K}_\infty^n \otimes_\varepsilon X \cong X_\infty^n$.
(c) Отождествим пространство $\mathbb{K}_1^n \otimes \mathbb{K}_\infty^n$ с пространством $n \times n$-матриц $M_n(\mathbb{K})$ при помощи изоморфизма $x \otimes y \mapsto (x_i y_j)$. Для произвольной матрицы $a = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ выразите ее нормы $\|a\|_\pi$ и $\|a\|_\varepsilon$ через матричные элементы a_{ij} (и убедитесь, что в общем случае эти нормы различны).

10.2. Пусть X — банахово пространство и I — множество. Положим

$$\ell^1(I, X) = \Big\{ x = (x_i) \in X^I : \|x\| = \sum_i \|x_i\| < \infty \Big\},$$
$$\ell^\infty(I, X) = \Big\{ x = (x_i) \in X^I : \|x\| = \sup_i \|x_i\| < \infty \Big\}.$$

При $X = \mathbb{K}$ эти пространства обозначаются через $\ell^1(I)$ и $\ell^\infty(I)$ соответственно.
(a) Убедитесь, что $\ell^1(I, X)$ и $\ell^\infty(I, X)$ — банаховы пространства.
(b) Постройте изометрический изоморфизм $\mathscr{L}(\ell^1(I, X), Y) \cong \ell^\infty(I, \mathscr{L}(X, Y))$.
(c) Постройте изометрический изоморфизм $\ell^1(I) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi X \cong \ell^1(I, X)$.

10.3. Пусть I, J — множества, P и Q — множества Кёте на I и J соответственно. Определим множество Кёте $P \odot Q$ на $I \times J$, полагая $P \odot Q = \{(p_i q_j) : p \in P,\ q \in Q\}$. Постройте топологический изоморфизм $\lambda^1(I, P) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi \lambda^1(J, Q) \cong \lambda^1(I \times J, P \odot Q)$.

10.4. Рассмотрим пространство Кёте

$$s(\mathbb{Z}^n) = \Big\{ x = (x_\alpha) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}^n} : \|x\|_k = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |x_\alpha| |\alpha|^k < \infty \ \forall k \in \mathbb{N} \Big\}.$$

(a) Постройте топологический изоморфизм $s(\mathbb{Z}^n) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi s(\mathbb{Z}^m) \cong s(\mathbb{Z}^{n+m})$.
(b) Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{T}^n) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi C^\infty(\mathbb{T}^m) \cong C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, где $\mathbb{T}^n$ — n-мерный тор. (*Указание*: воспользуйтесь п. (a) и n-мерным аналогом задачи 2.12.)

10.5. Постройте топологический изоморфизм $\mathscr{O}(\mathbb{D}_r^n) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi \mathscr{O}(\mathbb{D}_s^m) \cong \mathscr{O}(\mathbb{D}_r^n \times \mathbb{D}_s^m)$. (*Указание*: см. задачи 10.3 и 5.19.)

10.6. Пусть E и F — полунормированные пространства, S и T — нормирующие подмножества единичных шаров пространств E' и F' соответственно. Докажите, что

$$\|u\|_\varepsilon = \sup\big\{ |(f \otimes g)(u)| : f \in S,\ g \in T \big\} \qquad (u \in E \otimes F).$$

10.7. Пусть X — банахово пространство и I — множество. Положим

$$c_0(I, X) = \Big\{ x = (x_i) \in X^I : \lim_{i \to \infty} \|x_i\| = 0 \Big\}.$$

При $X = \mathbb{K}$ это пространство обозначачется через $c_0(I)$.
(a) Докажите, что $c_0(I, X)$ — замкнутое векторное подпространство в $\ell^\infty(I, X)$ (и, следовательно, банахово пространство).
(b) Постройте изометрический изоморфизм $c_0(I) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon X \cong c_0(I, X)$.
(c) Постройте изометрический изоморфизм $c_0(I) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon c_0(J) \cong c_0(I \times J)$.

10.8. Для следующих канонических отображений докажите, что они не являются ни топологически инъективными, ни сюръективными:
(a) $\ell^1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi c_0 \to \ell^1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon c_0$;
(b) $\ell^1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi \ell^p \to \ell^1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon \ell^p$ при $1 < p < \infty$;
(c) $\ell^1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi \ell^1 \to \ell^1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon \ell^1$;
(d) $c_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi c_0 \to c_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon c_0$;
(e) $C[0,1] \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi C[0,1] \to C[0,1] \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon C[0,1]$.

10.9. Пусть X и Y — локально компактные топологические пространства. Постройте топологический изоморфизм $C(X) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon C(Y) \cong C(X \times Y)$. (*Указание*: сведите все к разобранному на лекции случаю, когда X и Y компактны.)

10.10. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества.
(a) Докажите, что линейное отображение

$$\begin{gathered} C_c^\infty(U) \otimes C_c^\infty(V) \to C_c^\infty(U \times V), \\ f \otimes g \mapsto ((x,y) \mapsto f(x)g(y)), \end{gathered} \tag{1}$$

инъективно и имеет плотный образ. (*Указание*: для доказательства плотности образа можно воспользоваться рядами Фурье.)
(b) Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(U) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon C^\infty(V) \cong C^\infty(U \times V)$. (*Указание*: для доказательства топологической инъективности отображения $C^\infty(U) \otimes_\varepsilon C^\infty(V) \to C^\infty(U \times V)$, заданного формулой (1), можно воспользоваться изометрическим изоморфизмом $C(X) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon C(Y) \cong C(X \times Y)$, где X и Y — компакты; для доказательства плотности его образа пригодится п. (a).)

10.11. Постройте топологический изоморфизм $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \cong \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$. (*Указание*: можно действовать так же, как в задаче 10.10 (b).)

10.12. Пусть I, J — множества, P и Q — множества Кёте на I и J соответственно. Определим множество Кёте $P \odot Q$ на $I \times J$, полагая $P \odot Q = \{(p_i q_j) : p \in P,\ q \in Q\}$. Постройте топологический изоморфизм $\lambda^0(I,P) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon \lambda^0(J,Q) \cong \lambda^0(I \times J, P \odot Q)$.

10.13. Докажите, что канонические отображения $C^\infty(\mathbb{T}^n) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi C^\infty(\mathbb{T}^m) \to C^\infty(\mathbb{T}^n) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon C^\infty(\mathbb{T}^m)$ и $\mathscr{O}(\mathbb{D}_r^n) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi \mathscr{O}(\mathbb{D}_s^m) \to \mathscr{O}(\mathbb{D}_r^n) \mathbin{\widehat{\otimes}}_\varepsilon \mathscr{O}(\mathbb{D}_s^m)$ — топологические изоморфизмы. (*Указание*: воспользуйтесь задачами 10.3 и 10.12. Скоро мы увидим, что эти изоморфизмы вытекают из ядерности рассматриваемых пространств.)