**8.1.** Пусть $X$ — полное локально выпуклое пространство, $P$ — направленное определяющее семейство полунорм на $X$. Напомним (см. лекцию), что существует топологический изоморфизм $X \cong \varprojlim \tilde{X}_p$, где для каждого $p \in P$ через $\tilde{X}_p$ обозначено пополнение нормированного пространства $X_p = (X/p^{-1}(0), \hat{p})$. Опишите пространства $\tilde{X}_p$ для каждого из следующих пространств $X$:
**(a)** $\mathbb{K}^S$, где $S$ — множество;
**(b)** $C(T)$, где $T$ — локально компактное топологическое пространство;
**(c)** $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
**(d)** $\mathscr{O}(U)$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество;
**(e)** пространство Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$;
**(f)** пространства Кёте $\lambda^\nu(P)$;
**(g)** $C_c(T)$, где $T$ — локально компактное топологическое пространство со счетной базой.

**8.2.** Пусть $X$ — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Опишите пополнение сопряженного пространства $X'$, снабженного слабой$^*$ топологией.

**Определение 8.1.** Пусть $X$ — локально выпуклое пространство. *Борнологическое пространство, ассоциированное с* $X$, — это пара $(X_{\mathrm{born}}, i)$, состоящая из борнологического локально выпуклого пространства $X_{\mathrm{born}}$ и отображения $i \in \mathscr{L}(X_{\mathrm{born}}, X)$ и обладающая следующим свойством: для любого борнологического локально выпуклого пространства $Y$ и любого $\varphi \in \mathscr{L}(Y, X)$ существует единственное отображение $\psi \in \mathscr{L}(Y, X_{\mathrm{born}})$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ X_{\mathrm{born}} \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

коммутативной.

**8.3.** Пусть $X$ — локально выпуклое пространство. Предположим, что на $X$ существует локально выпуклая топология $\mathcal{T}$, которая не слабее исходной, превращает $X$ в борнологическое локально выпуклое пространство и обладает тем свойством, что подмножество $X$ $\mathcal{T}$-ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено в исходной топологии. Докажите, что пространство $(X, \mathcal{T})$ вместе с тождественным отображением $(X, \mathcal{T}) \to X$ — борнологическое пространство, ассоциированное с $X$.

**8.4** (*конструкция* $X_{\mathrm{born}}$)**.** Пусть $X$ — локально выпуклое пространство. Обозначим через $P_{\mathrm{born}}$ семейство все полунорм $p$ на $X$, обладающих тем свойством, что для каждого ограниченного множества $B \subset X$ множество $p(B)$ ограничено в $\mathbb{R}$. Докажите, что пространство $(X, \tau(P_{\mathrm{born}}))$ вместе с тождественным отображением $(X, \tau(P_{\mathrm{born}})) \to X$ — борнологическое пространство, ассоциированное с $X$.

**8.5.** Интерпретируйте $X_{\mathrm{born}}$ в терминах сопряженных функторов.

**8.6** (*другая конструкция* $X_{\mathrm{born}}$)**.** Пусть $X$ — локально выпуклое пространство, $\mathrm{Bdd}(X)$ — семейство всех его абсолютно выпуклых ограниченных подмножеств. Введем на $\mathrm{Bdd}(X)$ отношение порядка, полагая $B_1 \leqslant B_2$, если $B_1$ поглощается $B_2$. Для каждого $B \in \mathrm{Bdd}(X)$ положим $X_B = \mathrm{span}(B)$ и будем рассматривать $X_B$ как полунормированное пространство, полунорма на котором — функционал Минковского множества $B$. Если $B_1, B_2 \in \mathrm{Bdd}(X)$ и $B_1 \leqslant B_2$, то тавтологическое вложение $X_{B_1}$ в $X_{B_2}$ непрерывно (убедитесь). Таким образом, пространства $X_B$ образуют прямую систему. Докажите, что $\varinjlim \{X_B : B \in \mathrm{Bdd}(X)\} \cong X_{\mathrm{born}}$.

**8.7.** Докажите, что
**(a)** локально выпуклое пространство борнологично тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому пределу полунормированных пространств;
**(b)** полное борнологическое локально выпуклое пространство изоморфно прямому пределу банаховых пространств.

**8.8.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства. Докажите, что множество $S \subset \mathscr{L}(X, Y)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по операторной норме.

**8.9.** Приведите пример нормированного пространства и слабо$^*$ ограниченной последовательности в $X'$, не ограниченной по норме. (Этот пример показывает, что для неполных нормированных пространств теорема Банаха–Штейнгауза неверна, и поэтому нормированное пространство может не быть бочечным. В частности, борнологическое локально выпуклое пространство не всегда бочечно.)

**8.10**$^*$ (*бочечное неборнологическое пространство*)**.** Пусть $S$ — несчетное множество, $X = \mathbb{K}^S$, $X_0$ — подпространство в $X$, состоящее из функций с не более чем счетным носителем, и $X_1 = X_0 \oplus \mathbb{K}1 \subset X$. Докажите, что
**(a)** $X_0$ бочечно;
**(b)** если локально выпуклое пространство содержит плотное бочечное подпространство, то оно бочечно;
**(c)** $X_1$ бочечно;
**(d)** секвенциально замкнутая гиперплоскость борнологического локально выпуклого пространства замкнута;
**(e)** $X_1$ не является борнологическим.

**8.11.** Пусть $X$ и $Y$ — локально выпуклые пространства, $A \subset X$ — плотное подмножество. Докажите, что на каждом равностепенно непрерывном подмножестве $S \subset \mathscr{L}(X, Y)$ топология поточечной сходимости на элементах $A$ совпадает с топологией равномерной сходимости на компактах.

**8.12.** Пусть $X$ и $Y$ — локально выпуклые пространства, причем $X$ бочечно. Предположим, что $(T_n)$ — такая последовательность в $\mathscr{L}(X, Y)$, что для каждого $x \in X$ последовательность $(T_n x)$ сходится в $Y$. Докажите, что $(T_n)$ поточечно сходится к некоторому $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Верно ли аналогичное утверждение для направленностей?

**8.13.** Пусть $X, Y, Z$ — локально выпуклые пространства, причем $X$ и $Y$ метризуемы, и хотя бы одно из пространств $X, Y$ полно. Докажите, что каждое раздельно непрерывное билинейное отображение $X \times Y \to Z$ непрерывно. Верно ли это утверждение, если $X, Y$ — неполные нормированные пространства?

**8.14.** Пусть $X$ и $Y$ — локально выпуклые пространства, причем $X$ квазибочечно. Докажите, что каждое ограниченное подмножество $S \subset \mathscr{L}_b(X, Y)$ равностепенно непрерывно.

**8.15.** Пусть $X$ и $Y$ — метризуемые локально выпуклые пространства, причем $X$ полно, и пусть $\varphi \in \mathscr{L}(X, Y)$. Докажите, что либо $\varphi(X) = Y$, либо $\varphi(X)$ — множество первой категории в $Y$ (т.е. объединение счетного числа нигде не плотных множеств).

**8.16** (*теорема Гротендика о факторизации*)**.** Пусть $X$ — пространство Фреше, $Y$ — локально выпуклое пространство, $\{X_n\}$ — последовательность пространств Фреше, $\varphi \in \mathscr{L}(X, Y)$ и $\varphi_n \in \mathscr{L}(X_n, Y)$ $(n \in \mathbb{N})$. Предположим, что $\varphi(X) \subset \bigcup_n \varphi_n(X_n)$. Докажите, что
**(a)** $\varphi(X) \subset \varphi_n(X_n)$ для некоторого $n$;

**(b)** если все $\varphi_i$ инъективны, то для некоторого $n$ существует такое отображение $\psi \in \mathscr{L}(X, X_n)$, что $\varphi = \varphi_n \psi$.

*Указание*: пусть $Z_n = X \times_Y X_n$ и $\pi_n \colon Z_n \to X$ — проекция на 1-ый сомножитель; с помощью теоремы Бэра и 8.15 докажите, что $X = \pi_n(Z_n)$ для некоторого $n$.

**8.17** (*теоремы Гротендика об открытом отображении и о замкнутом графике*)**.** Пусть $X$ и $Y$ — локально выпуклые пространства. Предположим, что топология на $X$ является индуктивной относительно некоторой последовательности линейных отображений $\{\varphi_n \colon X_n \to X\}$, где $X_n$ — пространства Фреше и $\bigcup_n \varphi_n(X_n) = X$, а топология на $Y$ является индуктивной относительно некоторого (не обязательно счетного) семейства линейных отображений $\{\psi_i \colon Y_i \to Y\}$, где $Y_i$ — пространства Фреше и $\bigcup_i \psi_i(Y_i) = Y$ (например, это так, если $Y$ — полное борнологическое пространство; см. задачу 8.7). Докажите, что

**(1)** каждая непрерывная линейная сюръекция $X$ на $Y$ открыта;

**(2)** каждое линейное отображение из $Y$ в $X$ с замкнутым графиком непрерывно.