7.1. Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$, $x \in X$. Докажите, что $x \in \overline{Y}$ тогда и только тогда, когда в Y существует направленность, сходящаяся к x.

7.2. Пусть X и Y — топологические пространства. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любой направленности (x_λ) в X, сходящейся к x, направленность $(f(x_\lambda))$ сходится к $f(x)$.

7.3. Докажите, что топологическое пространство хаусдорфово тогда и только тогда, когда каждая направленность в нем имеет не более одного предела.

7.4. Пусть $(X, \tau(P))$ — локально выпуклое пространство. Докажите, что направленность (x_λ) в X сходится к точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда $p(x_\lambda - x) \to 0$ для каждого $p \in P$.

7.5. Пусть X — векторное пространство с проективной топологией, порожденной семейством линейных отображений $\{\varphi_i\colon X \to X_i : i \in I\}$, где $\{X_i : i \in I\}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что направленностъ (x_λ) в X сходится к точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда $\varphi_i(x_\lambda) \to \varphi_i(x)$ для всех $i \in I$.

7.6. Пусть X — топологическое пространство. Докажите, что точка $x \in X$ является предельной точкой направленности (x_λ) тогда и только тогда, когда некоторая поднаправленность направленности (x_λ) сходится к x.

7.7. Докажите, что топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда каждая направленность в нем имеет предельную точку.

7.8. Докажите, что в топологическом векторном пространстве
(1) всякая сходящаяся направленность фундаментальна;
(2) всякая фундаментальная направленность, обладающая сходящейся поднаправленностью, сходится.

7.9. Докажите, что непрерывный линейный оператор между топологическими векторными пространствами переводит фундаментальные направленности в фундаментальные.

7.10. Пусть $(X, \tau(P))$ — локально выпуклое пространство. Докажите, что направленность $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в X фундаментальна тогда и только тогда, когда для каждого $p \in P$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что для всех $\lambda, \mu \geqslant \lambda_0$ выполнено $p(x_\lambda - x_\mu) < \varepsilon$.

7.11. Докажите, что компактное подмножество любого хаусдорфова топологического векторного пространства полно.

7.12. Пусть X — метризуемое топологическое векторное пространство и ρ — метрика на X, определяющая его топологию и инвариантная относительно сдвигов. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(i) X полно;
(ii) X секвенциально полно;
(iii) (X, ρ) полно как метрическое пространство.

7.13. Пусть S — несчетное множество и X — подпространство в $\mathbb{K}^S$, состоящее из всех функций с не более чем счетным носителем. Докажите, что X секвенциально полно, но не полно.

7.14. Пусть X — топологическое векторное пространство, $X_0 \subset X$ — плотное векторное подпространство. Докажите, что для любого полного топологического векторного пространства Y всякий непрерывный линейный оператор из X_0 в Y единственным образом продолжается до непрерывного линейного оператора из X и Y.

7.15. Пусть X — топологическое векторное пространство, $X_0 \subset X$ — плотное векторное подпространство. Докажите, что
(1) каждая непрерывная полунорма p на X_0 единственным образом продолжается до непрерывной полунормы $\tilde{p}$ на X;
(2) если P — определяющее семейство полунорм на X_0, то $\{\tilde{p} : p \in P\}$ — определяющее семейство полунорм на X;
(3) если $\mathscr{U}$ — база окрестностей нуля в X_0, то $\{\overline{U} : U \in \mathscr{U}\}$ — база окрестностей нуля в X.

7.16. Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что $\prod_{i \in I} X_i$ полно $\iff$ $\bigoplus_{i \in I} X_i$ полно $\iff$ X_i полно для всех $i \in I$. Как следствие, сильнейшее локально выпуклое пространство полно.

7.17. Докажите, что обратный предел локально выпуклых пространств замкнут как подпространство в их произведении. Как следствие, обратный предел полных локально выпуклых пространств полон.

7.18*. Докажите, что строгий прямой предел последовательности полных локально выпуклых пространств полон.

7.19. Пусть Y — локально выпуклое пространство и $X \subset Y$ — векторное подпространство, снабженное локально выпуклой топологией, не менее сильной, чем унаследованная из Y. Назовем X *локально замкнутым* в Y, если в X есть база окрестностей нуля, замкнутых в Y. Докажите, что если Y полно, а X локально замкнуто в Y, то и X полно.

7.20. Выведите из задачи 7.19 полноту нормированных пространств ℓ^p (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), $C(K)$ (где K — компактное топологическое пространство), $\mathscr{L}(X, Y)$ (где X — нормированное, а Y — банахово пространство).

7.21. Докажите полноту следующих локально выпуклых пространств:
(1) $C(X)$, где X — локально компактное топологическое пространство;
(2) $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
(3) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$;
(4) $\mathscr{O}(U)$, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество;
(5) $\lambda^\nu(P)$, где P — множество Кёте и $\nu \in [1, +\infty] \cup \{0\}$;
(6) $C_c(X)$, где X — локально компактное топологическое пространство со счетной базой;
(7) $C_c^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
(8) $\mathscr{O}_z$, где $z \in \mathbb{C}$.

7.22. Для локально выпуклого пространства X обозначим через X^∞ прямое произведение, а через X_∞ прямую сумму счетного числа экземпляров пространства X. Пусть X и Y — банаховы пространства, причем Y непрерывно и инъективно вложено в X с плотным образом. (Например, можно взять $X = \ell^2$ и $Y = \ell^1$.) Рассмотрим отображение

$$\varphi \colon X_\infty \oplus Y^\infty \to X^\infty, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

Докажите, что φ — открытое отображение на плотное собственное подпространство в X^∞. Выведите отсюда, что факторпространство $(X_\infty \oplus Y^\infty)/\operatorname{Ker}\varphi$ неполно (хотя само $X_\infty \oplus Y^\infty$ полно).