6.1. Пусть $\mathscr{X} = (X_i, \varphi_{ij})$ — прямая система локально выпуклых пространств. Положим

$$X = \Big(\bigoplus_{i \in I} X_i\Big) / \operatorname{span}\{x_i - \varphi_{ij}(x_i) : i \leqslant j,\ x_i \in X_i\}.$$

Для каждого $j \in I$ обозначим через $\varphi_j \colon X_j \to X$ композицию стандартного вложения $X_j \to \bigoplus_{i \in I} X_i$ и факторотображения $\bigoplus_{i \in I} X_i \to X$. Докажите, что (X, φ_i) — прямой предел $\mathscr{X}$ в категории локально выпуклых пространств.

6.2. (1) Пусть X — векторное пространство, I — направленное множество, $(X_i)_{i \in I}$ — семейство векторных подпространств в X, причем $X_i \subset X_j$ при $i \leqslant j$, и $\bigcup_{i \in I} X_i = X$. Предположим, что каждое пространство X_i снабжено локально выпуклой топологией таким образом, что для всех $i \leqslant j$ вложение X_i в X_j непрерывно. Снабдим X индуктивной топологией относительно семейства вложений $(X_i \to X)_{i \in I}$. Докажите, что $X \cong \varinjlim X_i$.
(2) Докажите, что прямой предел любой системы локально выпуклых пространств (X_i, φ_{ij}), в которой все отображения φ_{ij} инъективны, получается так, как в п. 1.

6.3. Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — компактное множество, $\mathscr{U}$ — какая-либо база его относительно компактных открытых окрестностей. Напомним (см. лекцию), что имеет место топологический изоморфизм $\mathscr{O}(K) \cong \varinjlim \{\mathscr{O}(U) : U \in \mathscr{U}\}$. Постройте топологический изоморфизм $\mathscr{O}(K) \cong \varinjlim \{\mathscr{A}(\overline{U}) : U \in \mathscr{U}\}$, где $\mathscr{A}(\overline{U})$ — банахово пространство функций, голоморфных в U и непрерывных на $\overline{U}$, снабженное sup-нормой.

6.4. Докажите хаусдорфовость пространств $C_c(X)$ (где X — топологическое пространство), $C_c^\infty(U)$ (где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество), $\mathscr{O}(K)$ (где $K \subset \mathbb{C}^n$ — компактное множество).

6.5. Пусть $U \subset \mathbb{R}$ — открытое множество. Функция $f \colon U \to \mathbb{C}$ называется *вещественно-аналитической*, если ее ряд Тейлора сходится к ней в окрестности каждой точки $x \in U$. Пусть $A(U)$ — пространство всех вещественно-аналитических функций на U. Обозначим через $\mathscr{K}$ семейство всех компактов в U, и для каждого $K \in \mathscr{K}$ обозначим через $\mathscr{V}(K)$ множество всех открытых подмножеств $\mathbb{C}$, содержащих K.
(1) Убедитесь, что существуют изоморфизмы векторных пространств

$$A(U) \cong \varprojlim_{K \in \mathscr{K}} \mathscr{O}(K) \cong \varprojlim_{K \in \mathscr{K}} \Big(\varinjlim_{V \in \mathscr{V}(K)} \mathscr{O}(V) \Big). \tag{1}$$

(2) Докажите, что пространство $A(U)$, снабженное соответствующей локально выпуклой топологией (относительно которой изоморфизмы (1) являются топологическими), хаусдорфово.
(3) Докажите, что последовательность сходится в $A(U)$ тогда и только тогда, когда она сходится равномерно на некоторой комплексной окрестности каждой точки $x \in U$.

6.6. Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $C_x = \varinjlim C[x - 1/n, x + 1/n]$ — пространство ростков непрерывных функций в x, снабженное соответствующей индуктивной локально выпуклой топологией. Представим C_x в виде $C_x = \mathbb{K}1 \oplus C_x^0$, где $C_x^0 = \{f \in C_x : f(x) = 0\}$. Докажите, что топология на C_x^0, унаследованная из C_x, тривиальна. Как следствие, C_x нехаусдорфово.

6.7. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Представим пространство $\mathscr{O}_z$ ростков голоморфных функций в z в виде $\mathscr{O}_z = \varinjlim \mathscr{O}(U_{1/n}(z))$. Снабдим каждое из пространств $\mathscr{O}(U_{1/n}(z))$ топологией поточечной сходимости, а пространство $\mathscr{O}_z$ — соответствующей индуктивной локально выпуклой топологией. Представим $\mathscr{O}_z$ в виде $\mathscr{O}_z = \mathbb{K}1 \oplus \mathscr{O}_z^0$, где $\mathscr{O}_z^0 = \{f \in \mathscr{O}_z : f(z) = 0\}$. Докажите, что топология на $\mathscr{O}_z^0$, унаследованная из $\mathscr{O}_z$, тривиальна. Как следствие, $\mathscr{O}_z$ нехаусдорфово относительно введенной выше (неканонической) топологии.

6.8*. (1) Представим пространство $C_c(\mathbb{R})$ в виде $C_c(\mathbb{R}) = \varinjlim C_{[-n,n]}(\mathbb{R})$, где $C_{[-n,n]}(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с носителем в $[-n, n]$. Докажите, что индуктивная локально выпуклая топология на $C_c(\mathbb{R})$ не совпадает с индуктивной топологий τ_{i} (см. задачу 4.4).
(2) Докажите аналогичное утверждение для пространства $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

6.9. Пусть $X = \varinjlim X_n$ — строгий прямой предел последовательности локально выпуклых пространств, причем для каждого n пространство X_n замкнуто в X_{n+1}. Докажите, что подмножество $B \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда B содержится в некотором X_n и ограничено в нем.

6.10. Пусть $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Докажите, что при $r < R$ отображение ограничения $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R) \to \mathscr{O}(\mathbb{D}_r)$ не является топологически инъективным. Как следствие, прямая последовательность $\{\mathscr{O}(\mathbb{D}_{1/n}) : n \in \mathbb{N}\}$ не является строгой.

6.11. Пусть X — множество, Y — локально выпуклое пространство, $F \subset Y^X$ — векторное подпространство и $\mathscr{B}$ — некоторое F-ограниченное семейство подмножеств X. Снабдим F топологией равномерной сходимости на элементах семейства $\mathscr{B}$. Пусть $\mathscr{U}$ — какая-либо предбаза окрестностей нуля в Y. Для $B \in \mathscr{B}$ и $U \in \mathscr{U}$ положим $M(B, U) = \{\varphi \in F : \varphi(B) \subset U\}$. Докажите, что $\{M(B, U) : B \in \mathscr{B},\ U \in \mathscr{U}\}$ — предбаза окрестностей нуля в F.

6.12. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, $\mathscr{B}$ — какое-либо семейство ограниченных подмножеств X. Докажите, что пространство $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда Y хаусдорфово и $\bigcup \mathscr{B}$ тотально в X.