**5.1. (1)** Докажите, что прямая сумма семейства локально выпуклых пространств является их копроизведением как объектов категории локально выпуклых пространств.
**(2)** Докажите, что в категории нормированных пространств бесконечное семейство ненулевых пространств не имеет копроизведения.

**5.2.** Пусть $\{X_i : i \in I\}$ — семейство локально выпуклых пространств.
**(1)** Докажите, что если множество $I$ конечно, то $\bigoplus_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} X_i$ как топологические векторные пространства.
**(2)** Докажите, что если $I$ бесконечно и $X_i \neq 0$ для всех $i \in I$, то топология на $\bigoplus_{i \in I} X_i$ строго сильнее топологии, унаследованной из $\prod_{i \in I} X_i$.

**5.3.** Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство ненулевых локально выпуклых пространств. Докажите, что
**(1)** $\bigoplus_{i \in I} X_i$ хаусдорфово $\iff$ все $X_i$ хаусдорфовы;
**(2)** $\bigoplus_{i \in I} X_i$ нормируемо $\iff$ все $X_i$ нормируемы, и $I$ конечно;
**(3)** $\bigoplus_{i \in I} X_i$ метризуемо $\iff$ все $X_i$ метризуемы, и $I$ конечно.

**5.4.** Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что подмножество $B \subset \bigoplus_{i \in I} X_i$ ограничено тогда и только тогда, когда существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что $B \subset \prod_{j \in J} B_j$, где $B_j \subset X_j$ — ограниченные подмножества.

**5.5.** Пусть $\mathscr{X} = (X_i, \varphi_{ij})$ — обратная система локально выпуклых пространств. Положим

$$X = \Big\{ x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i : x_i = \varphi_{ij}(x_j) \ \forall i < j \Big\}.$$

Снабдим $X$ топологией, унаследованной из $\prod_{i \in I} X_i$. Для каждого $i \in I$ пусть $\varphi_i \colon X \to X_i$ — проекция на $i$-й сомножитель.
**(1)** Докажите, что $(X, \varphi_i)$ — обратный предел системы $\mathscr{X}$ в категории локально выпуклых пространств.
**(2)** Докажите, что $X$ замкнуто в $\prod_{i \in I} X_i$.
**(3)** Пусть для каждого $i \in I$ задана база окрестностей нуля $\mathscr{U}_i$ в $X_i$. Докажите, что семейство $\{\varphi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \mathscr{U}_i,\ i \in I\}$ — база окрестностей нуля в $X$.

**5.6.** Пусть $(X_i, \varphi_{ij})$ — обратная система локально выпуклых пространств, $X = \varprojlim (X_i, \varphi_{ij})$, $Y \subset X$ — векторное подпространство, $Y_i = \varphi_i(Y) \subset X_i$.
**(1)** Докажите, что $\overline{Y} = \varprojlim (\overline{Y_i}, \varphi_{ij}|_{\overline{Y_j}})$.
**(2)** Верно ли, что $Y = \varprojlim (Y_i, \varphi_{ij}|_{Y_j})$?

**Определение 5.1.** Обратная система $\mathscr{X}$ локально выпуклых пространств называется *приведенной*, если для каждого $i \in I$ каноническое отображение $\varprojlim \mathscr{X} \to X_i$ имеет плотный образ. *Приведенный обратный предел* — это обратный предел приведенной системы локально выпуклых пространств.

**5.7.** Пусть $X = \varprojlim (X_i, \varphi_{ij})$ — приведенный обратный предел локально выпуклых пространств. Докажите, что $X$ нормируемо тогда и только тогда, когда система $(X_i, \varphi_{ij})$ «стабилизируется на нормируемом пространстве» в следующем смысле: существует такое $i_0 \in I$, что для каждого $i \geqslant i_0$ пространство $X_i$ нормируемо, и для каждых $j \geqslant i \geqslant i_0$ отображение $\varphi_{ij} \colon X_j \to X_i$ — топологический изоморфизм.

**5.8.** Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Постройте топологический изоморфизм $\prod_{i \in I} X_i \cong \varprojlim \{\prod_{i \in J} X_i : J \subset I$ — конечное множество$\}$.

**5.9.** Пусть $X$ — локально компактное топологическое пространство. Постройте топологический изоморфизм $C(X) \cong \varprojlim\{C(K) : K \subset X - \text{компакт}\}$.

**5.10.** Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — его компактное исчерпание (т.е. такая цепочка открытых подмножеств $U$, что каждое $\overline{U_i}$ компактно, содержится в $U_{i+1}$, и $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$). Для каждого $i$ обозначим через $\mathscr{A}(\overline{U_i})$ подпространство в $C(\overline{U_i})$, состоящее из функций, голоморфных в $U_i$. Постройте топологический изоморфизм $\mathscr{O}(U) \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{A}(\overline{U_i})$.

**5.11.** Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Представьте пространство $\mathscr{O}(U)$ в виде обратного предела последовательности гильбертовых пространств.

**5.12.** Рассмотрим линейный оператор $\varphi\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$, действующий по формуле $\varphi(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$.
**(1)** Докажите, что обратный предел последовательности $\ell^\infty \xleftarrow{\varphi} \ell^\infty \xleftarrow{\varphi} \ell^\infty \xleftarrow{\varphi} \cdots$ топологически изоморфен $s$.
**(2)** Докажите, что в п. 1 можно заменить $\ell^\infty$ на $\ell^p$ для любого $1 \leqslant p < \infty$ или на пространство $c_0 \subset \ell^\infty$ последовательностей, стремящихся к нулю на бесконечности.

**5.13.** Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{R}) \cong \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} C^k[-k, k]$.

**5.14*.** Представьте пространство $C^\infty(\mathbb{R})$ в виде обратного предела последовательности гильбертовых пространств.

**5.15.** Представьте пространство Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в виде обратного предела последовательности **(1)** банаховых пространств; **(2)*** гильбертовых пространств.

**5.16.** Рассмотрим множество последовательностей $P = \{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots\}$, где $p^{(k)} = (1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ ($k$ единиц, а дальше нули). Убедитесь, что для любого $\nu \in [1, +\infty]$ $\lambda^\nu(P) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ как топологическое векторное пространство.

**5.17.** Рассмотрим множество последовательностей $P = \{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots\}$, где $p_n^{(k)} = n^k$. Убедитесь, что для любого $\nu \in [1, +\infty]$ $\lambda^\nu(P) = s$ как топологическое векторное пространство.

**5.18.** Рассмотрим множество последовательностей $P = \{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots\}$, где $p_n^{(k)} = k^n$. Для произвольного $\nu \in [1, +\infty]$ постройте топологический изоморфизм $\lambda^\nu(P) \cong \mathscr{O}(\mathbb{C})$.

**5.19.** Зафиксируем $R \in (0, +\infty]$ и определим множество Кёте $P$ на $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, полагая

$$P = \left\{(r^{|k|})_{k\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} : 0 < r < R\right\},$$

где $|k| = k_1 + \cdots + k_n$ для $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Для произвольного $\nu \in [1, +\infty]$ постройте топологический изоморфизм $\lambda^\nu(P) \cong \mathscr{O}(\mathbb{D}^n_R)$, где $\mathbb{D}^n_R = \{z \in \mathbb{C}^n : \max_{1\leqslant i\leqslant n} |z_i| < R\}$ — полидиск в $\mathbb{C}^n$ радиуса $R$.

**5.20** (*теорема Айзенберга–Митягина*)**.** Область $D$ в $\mathbb{C}^n$ называется *полной областью Рейнхардта*, если для любой точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in D$ и любого набора $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющего условию $|\lambda_i| \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, имеем $(\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_n z_n) \in D$. Для ограниченной полной области Рейнхардта $D$ и для каждого $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ положим $b_k(D) = \sup_{z\in D} |z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}|$. Определим множество Кёте $P$ на $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, полагая

$$P = \left\{(b_k(D) s^{|k|})_{k\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} : 0 < s < 1\right\}.$$

Для произвольного $\nu \in [1, +\infty]$ постройте топологический изоморфизм $\lambda^\nu(P) \cong \mathscr{O}(D)$. Убедитесь, что при $D = \mathbb{D}^n_R$ это дает результат предыдущей задачи. Во что превращается данное утверждение, если $D = \mathbb{B}^n_R = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum |z_i|^2 < R^2\}$ — шар радиуса $R$?

**5.21.** Пусть $P$ — множество всех неотрицательных числовых последовательностей $p = (p_n)$, обладающих тем свойством, что $p_n = o(\varepsilon^n)$ для любого $\varepsilon > 0$. Для произвольного $\nu \in [1, +\infty]$ постройте топологический изоморфизм $\lambda^\nu(P) \cong \mathscr{O}_z$ (где $z \in \mathbb{C}$).

**5.22.** Метризуемо ли пространство $\mathscr{O}_z$?