

4.1. Пусть X — топологическое векторное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Докажите, что факторпространство X/X_0 хаусдорфово тогда и только тогда, когда X_0 замкнуто в X .

4.2. Пусть X — векторное пространство, снабженное проективной локально выпуклой топологией относительно семейства линейных отображений $(\varphi_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$, где $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что

- (1) проективная топология на X — слабая из всех локально выпуклых топологий на X , относительно которых все φ_i непрерывны;
- (2) проективная топология на X — слабая из всех топологий на X , относительно которых все φ_i непрерывны;
- (3) проективная топология на X — единственная локально выпуклая топология на X со следующим свойством: если Y — локально выпуклое пространство, то линейное отображение $\psi: Y \rightarrow X$ непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения $\varphi_i \circ \psi: Y \rightarrow X_i$ непрерывны;
- (4) если для каждого $i \in I$ задана предбаза окрестностей нуля σ_i в X_i , то семейство $\{\varphi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \sigma_i, i \in I\}$ является предбазой окрестностей нуля в X .

4.3. Пусть X — векторное пространство, снабженное индуктивной локально выпуклой топологией относительно семейства линейных отображений $(\varphi_i: X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, где $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что

- (1) индуктивная топология на X — сильнейшая из всех локально выпуклых топологий на X , относительно которых все φ_i непрерывны;
- (2) индуктивная топология на X — единственная локально выпуклая топология на X со следующим свойством: если Y — локально выпуклое пространство, то линейное отображение $\psi: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения $\psi \circ \varphi_i: X_i \rightarrow Y$ непрерывны;
- (3) семейство всех абсолютно выпуклых поглощающих множеств $U \subset X$, таких, что $\varphi_i^{-1}(U)$ — окрестность нуля в X_i для всех i , образует базу окрестностей нуля в X .

4.4. Пусть X, X_i, φ_i — те же, что в предыдущей задаче. Предположим дополнительно, что $X = \sum_{i \in I} \text{Im } \varphi_i$. Соответствующую индуктивную локально выпуклую топологию на X обозначим через τ_{ivc} .

- (1) Докажите, что на X существует сильнейшая из всех топологий, таких, что все отображения φ_i непрерывны. Эту топологию будем обозначать через τ_i .
- (2) Докажите, что на X существует сильнейшая из всех топологий, превращающих X в топологическое векторное пространство и таких, что все отображения φ_i непрерывны. Эту топологию будем обозначать через τ_{iv} .
- (3)* Докажите, что если I не более чем счетно, то $\tau_{\text{iv}} = \tau_{\text{ivc}}$. (*Указание:* достаточно установить, что базу окрестностей нуля в τ_{iv} образуют множества вида $\sum_i \varphi_i(U_i)$, где $U_i \subset X_i$ — окрестность нуля.)
- (4)* Приведите пример ситуации, когда I несчетно и $\tau_{\text{iv}} \neq \tau_{\text{ivc}}$. (*Указание:* можно рассмотреть сильнейшую локально выпуклую топологию на векторном пространстве несчетной размерности.)
- (5) Приведите пример ситуации, когда I конечно и $\tau_i \neq \tau_{\text{iv}}$.

4.5. Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство ненулевых локально выпуклых пространств. Докажите, что

- (1) $\prod_{i \in I} X_i$ хаусдорфово \iff все X_i хаусдорфовы;
- (2) $\prod_{i \in I} X_i$ нормируемо \iff все X_i нормируемы, и I конечно;
- (3) $\prod_{i \in I} X_i$ метризуемо \iff все X_i метризуемы, и I не более чем счетно.

4.6. (1) Докажите, что произведение семейства локально выпуклых пространств является их произведением как объектов категории локально выпуклых пространств.

(2) Докажите, что в категории нормированных пространств бесконечное семейство ненулевых пространств не имеет произведения.

4.7. Пусть X — векторное пространство с проективной топологией, порожденной семейством линейных отображений $(\varphi_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I}$, где $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что подмножество $B \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда $\varphi_i(B)$ ограничено в X_i для всех $i \in I$. В частности, подмножество $B \subset \prod_{i \in I} X_i$ ограничено тогда и только тогда, когда $B \subset \prod_{i \in I} B_i$, где $B_i \subset X_i$ — ограниченные подмножества.

4.8. Пусть X — локально компактное топологическое пространство со счетной базой, $C_c(X)$ — пространство финитных непрерывных функций на X с канонической индуктивной топологией. Обозначим через $C(X)_+$ множество всех неотрицательных непрерывных функций на X . Для каждого $a \in C(X)_+$ введем полунорму $\|\cdot\|_a$ на пространстве $C_c(X)$, полагая $\|f\|_a = \sup_{x \in X} |f(x)|a(x)$. Докажите, что семейство полунорм $\{\|\cdot\|_a : a \in C(X)_+\}$ является определяющим для $C_c(X)$.

4.9. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $C_c^\infty(U)$ — пространство финитных гладких функций на U с канонической индуктивной топологией. Обозначим через \mathcal{V} множество всех наборов вида $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n}$, где $v_\alpha \in C(U)_+$ и семейство $(\text{supp } v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n}$ локально конечно. Для каждого $v = (v_\alpha) \in \mathcal{V}$ введем полунорму $\|\cdot\|_v$ на $C_c^\infty(U)$, полагая

$$\|f\|_v = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \sup_{x \in U} |D^\alpha f(x)|v_\alpha(x).$$

Докажите, что семейство полунорм $\{\|\cdot\|_v : v \in \mathcal{V}\}$ является определяющим для $C_c^\infty(U)$.