3.1*. Докажите, что на конечномерном векторном пространстве X есть только одна топология, превращающая X в хаусдорфово топологическое векторное пространство, и эта топология задается любой нормой на X. (На лекции это утверждение было доказано для локально выпуклых топологий.)

3.2*. Докажите, что топологическое векторное пространство полуметризуемо тогда и только тогда, когда его топология задается некоторой F-полунормой. (На лекции это утверждение было доказано для локально выпуклых пространств.)

3.3. Пусть S — бесконечное множество. Докажите, что на пространстве $\mathbb{K}^S$ нет непрерывных норм. Как следствие, оно ненормируемо.

3.4. Пусть X — некомпактное тихоновское топологическое пространство. Докажите, что на пространстве $C(X)$ нет непрерывных норм. Как следствие, оно ненормируемо.

3.5. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое открытое множество. Докажите, что на пространстве $C^\infty(U)$ нет непрерывных норм. Как следствие, оно ненормируемо.

3.6. Докажите, что следующие пространства ненормируемы, хотя на каждом из них есть непрерывная норма: **(1)** s; **(2)** $C^\infty[a,b]$; **(3)** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; **(4)** $\mathscr{O}(U)$ (где U — область в $\mathbb{C}$).

3.7. Докажите метризуемость следующих пространств:
(1) $C(X)$, где X — локально компактное топологическое пространство со счетной базой;
(2) $C^\infty(U)$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

3.8. Пусть S — множество. Докажите, что пространство $\mathbb{K}^S$ метризуемо тогда и только тогда, когда S не более чем счетно.

3.9. Докажите, что сильнейшее локально выпуклое пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно конечномерно.

3.10. Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что
(1) сопряженное пространство X' со слабой* топологией метризуемо тогда и только тогда, когда размерность X не более чем счетна;
(2) пространство X со слабой топологией метризуемо тогда и только тогда, когда оно конечномерно.

3.11. Докааажите, что относительно компактное подмножество топологического векторного пространства ограничено.

3.12*. Докажите, что хаусдорфово топологическое векторное пространство локально компактно тогда и только тогда, когда оно конечномерно. (На лекции это утверждение было доказано для локально выпуклых пространств.)

3.13. Придумайте пример линейного оператора между локально выпуклыми пространствами, переводящего ограниченные множества в ограниченные, но не являющегося секвенциально непрерывным. Отсюда получите пример неборнологического локально выпуклого пространства.

3.14*. Придумайте пример секвенциально непрерывного линейного оператора между локально выпуклыми пространствами, не являющегося непрерывным.

3.15. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, $\mathscr{U}$ — предбаза окрестностей нуля в X. Докажите, что линейный оператор $\varphi\colon X \to Y$ открыт тогда и только тогда, когда для каждого $U \in \mathscr{U}$ множество $\varphi(U)$ является окрестностью нуля в Y.

3.16. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, P и Q — определяющие семейства полунорм на X и Y соответственно, $\varphi\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор. Докажите, что

(1) φ топологически инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен и для каждого $p \in P$ существуют такие $c > 0$ и $q_1, \ldots, q_n \in Q$, что $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} q_i(\varphi(x)) \geqslant cp(x)$ для всех $x \in X$ (при этом, если X хаусдорфово, то инъективность φ следует из последнего условия);

(2) φ открыт тогда и только тогда, когда для каждого $p \in P$ существуют такие $C > 0$ и $q_1, \ldots, q_n \in Q$, что для каждого $y \in Y$ найдется $x \in X$, удовлетворяющий условиям $\varphi(x) = y$ и $p(x) \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} q_i(y)$.