2.1. Пусть X — топологическое векторное пространство, $V \subset X$ — абсолютно выпуклая окрестность нуля и p_V — ее функционал Минковского. Докажите, что $\operatorname{Int} V = \{x : p_V(x) < 1\}$ и $\overline{V} = \{x : p_V(x) \leqslant 1\}$. Выведите отсюда, что соответствие $V \mapsto p_V$ — биекция между семейством всех абсолютно выпуклых открытых окрестностей нуля в X и семейством всех непрерывных полунорм на X, причем обратное отображение действует по правилу $p \mapsto U_p = \{x : p(x) < 1\}$.

2.2. Пусть p и q — полунормы на векторном пространстве. Докажите, что $p \leqslant q$ тогда и только тогда, когда $U_q \subset U_p$, и $p \prec q$ тогда и только тогда, когда $U_q \prec U_p$.

2.3. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $0 < p < 1$. Обозначим через $L^p(X, \mu)$ пространство классов μ-эквивалентности тех измеримых функций $f \colon X \to \mathbb{K}$, для которых функция $|f|^p$ интегрируема. Для $f \in L^p(X, \mu)$ положим

$$|f|_p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x).$$

(1) Докажите, что $|\cdot|_p$ — F-норма на $L^p(X, \mu)$ (так что $L^p(X, \mu)$ — метризуемое топологическое векторное пространство).
(2) Докажите, что на $L^p[0,1]$ нет ненулевых непрерывных линейных функционалов. Как следствие, $L^p[0,1]$ не локально выпукло.
(3) Может ли $L^p(X, \mu)$ быть локально выпуклым и бесконечномерным?

2.4. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, причем $\mu(X) < \infty$. Обозначим через $L^0(X, \mu)$ пространство классов μ-эквивалентности всех измеримых функций $f \colon X \to \mathbb{K}$. Зафиксируем ограниченную неубывающую функцию $\varphi \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ со следующими свойствами:

1) $\varphi(s + t) \leqslant \varphi(s) + \varphi(t) \quad (s, t \geqslant 0)$;
2) $\varphi(0) = 0$;
3) φ осуществляет гомеоморфизм между некоторыми окрестностями точки 0.

Например, можно положить $\varphi(t) = t/(1 + t)$ или $\varphi(t) = \min\{t, 1\}$. Для $f \in L^0(X, \mu)$ положим

$$|f|_0 = \int_X \varphi(|f(x)|) \, d\mu(x).$$

(1) Докажите, что $|\cdot|_0$ — F-норма на $L^0(X, \mu)$ (так что $L^0(X, \mu)$ — метризуемое топологическое векторное пространство).
(2) Докажите, что последовательность сходится в $L^0(X, \mu)$ тогда и только тогда, когда она сходится по мере.
(3) Докажите, что на $L^0[0,1]$ нет ненулевых непрерывных линейных функционалов. Как следствие, $L^0[0,1]$ не локально выпукло.
(4) Может ли $L^0(X, \mu)$ быть локально выпуклым и бесконечномерным?

2.5. Пространство s *быстро убывающих последовательностей* состоит из таких последовательностей $x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ последовательность $(x_n n^k)$ ограничена. Зафиксируем $p \in [1, +\infty)$. Докажите, что следующие семейства полунорм на s эквивалентны:

(1) $\|x\|_k^{(\infty)} = \sup_n |x_n| n^k \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$;

(2) $\|x\|_k^{(1)} = \sum_n |x_n| n^k \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$;

(3) $\|x\|_k^{(p)} = \left(\sum_n |x_n|^p n^{kp}\right)^{1/p} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$.

2.6. *Пространство Шварца* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что для каждых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ функция $x^\alpha D^\beta f(x)$ ограничена. Зафиксируем произвольную норму $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^n$ и $p \in [1, +\infty)$. Докажите, что следующие семейства полунорм на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны:

(1) $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})$;

(2) $\|f\|_{k,\beta} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|^k |D^\beta f(x)| \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ , \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})$;

(3) $\|f\|^{(0)}_{k,\beta} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^k |D^\beta f(x)| \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ , \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})$;

(4) $\|f\|^{(1)}_{k,\beta} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^k |D^\beta f(x)|\, dx \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ , \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})$;

(5) $\|f\|^{(p)}_{k,\beta} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^{kp} |D^\beta f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ , \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})$.

2.7. Пусть U — область в $\mathbb{C}$, $\mathscr{O}(U)$ — пространство голоморфных функций в U. Пусть $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность областей, образующая компактное исчерпание U (т.е. $U = \bigcup_i U_i$, $\overline{U_i}$ компактно и $\overline{U_i} \subset U_{i+1}$ для всех i). Зафиксируем $p \in [1, +\infty)$ и обозначим через μ меру Лебега на плоскости. Докажите, что следующие семейства полунорм на $\mathscr{O}(U)$ эквивалентны:

(1) $\|f\|_K = \sup\limits_{z\in K} |f(z)| \quad (K \subset U$ — компакт);

(2) $\|f\|_{k,\ell,K} = \sup\limits_{z=x+iy\in K} \dfrac{\partial^{k+\ell} f(z)}{\partial x^k\, \partial y^\ell} \quad (K \subset U$ — компакт, $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$;

(3) $\|f\|^{(1)}_i = \int_{U_i} |f(z)|\, d\mu(z) \quad (i \in \mathbb{N})$;

(4) $\|f\|^{(p)}_i = \Big(\int_{U_i} |f(z)|^p\, d\mu(z)\Big)^{1/p} \quad (i \in \mathbb{N})$.

Эквивалентность семейств (1) и (2) означает, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(U)$ совпадает с унаследованной из $C^\infty(U)$.

2.8. Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Для $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Зафиксируем $p \in [1, +\infty)$ и обозначим через μ меру Лебега на окружности $|z| = r$. Докажите, что следующие семейства полунорм на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ эквивалентны:

(1) $\|f\|_K = \sup\limits_{z\in K} |f(z)| \quad (K \subset U$ — компакт);

(2) $\|f\|^{(1)}_r = \sum_{n=0}^\infty |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

(3) $\|f\|^{(p)}_r = \Big(\sum_{n=0}^\infty (|c_n(f)| r^n)^p\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R)$;

(4) $\|f\|^\infty_r = \sup\limits_{n\geqslant 0} |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

(5) $\|f\|^I_r = \int_{|z|=r} |f(z)|\, d\mu(z) \quad (0 < r < R)$;

(6) $\|f\|^{I,p}_r = \Big(\int_{|z|=r} |f(z)|^p\, d\mu(z)\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R)$.

2.9. Пусть $\lambda = (\lambda_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Рассмотрим *диагональный оператор*

$$M_\lambda \colon \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots).$$

(1) Докажите, что M_λ непрерывен.
(2) Придумайте условие на λ, необходимое и достаточное для того, чтобы $M_\lambda(s) \subset s$.
(3) Придумайте условие на λ, необходимое и достаточное для того, чтобы M_λ был непрерывным оператором в s.

2.10. Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространствах **(1)** $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; **(2)** s.

2.11. **(1)** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Докажите непрерывность дифференциального оператора

$$\sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha D^\alpha \tag{1}$$

в пространстве $C^\infty(U)$, где $a_\alpha \in C^\infty(U)$ — фиксированные функции.
(2) Придумайте разумное условие на функции $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, достаточное для того, чтобы формула (1) определяла непрерывный оператор в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
(3) Снабдим пространство $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ формальных степенных рядов топологией покоэффициентной сходимости. Докажите, что для любых $a_\alpha \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ оператор (1) непрерывен в пространстве $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$.
(4) Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $a_1, \ldots, a_N \in \mathscr{O}(U)$. Докажите непрерывность дифференциального оператора

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dz^k}$$

в пространстве $\mathscr{O}(U)$.

2.12. Пространство $s(\mathbb{Z})$ быстро убывающих последовательностей на $\mathbb{Z}$ состоит из таких последовательностей $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ последовательность $(x_n |n|^k)$ ограничена. Топология на $s(\mathbb{Z})$ определяется так же, как на пространстве $s = s(\mathbb{N})$ (см. задачу 2.5). Положим $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и обозначим через μ нормализованную меру длины на $\mathbb{T}$ (так что мера всей окружности равна 1). Докажите, что *преобразование Фурье*

$$\mathscr{F} \colon C^\infty(\mathbb{T}) \to s(\mathbb{Z}), \quad (\mathscr{F} f)(n) = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n} \, d\mu(z),$$

является топологическим изоморфизмом между $C^\infty(\mathbb{T})$ и $s(\mathbb{Z})$.