Соглашение. Все векторные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1. Докажите, что замыкание векторного подпространства в топологическом векторном пространстве является векторным подпространством.

1.2. Пусть X и Y — топологические векторные пространства. Докажите, что
(1) линейный оператор $X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле;
(2) множество $\mathscr{L}(X,Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y является векторным подпространством в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X,Y)$.

1.3. Докажите, что топология на векторном пространстве X, порожденная каким-либо семейством полунорм, превращает X в топологическое векторное пространство.
Подсказка: экономнее всего свести все к случаю одной полунормы.

1.4. Пусть (X,P) — полинормированное пространство. Докажите, что последовательность (x_n) в X сходится к элементу $x \in X$ в топологии, порожденной семейством полунорм P, тогда и только тогда, когда $p(x_n - x) \to 0$ для всех $p \in P$.

1.5. Пусть (X,P) — полинормированное пространство. Докажите, что $\overline{\{0\}} = \bigcap\{p^{-1}(0) : p \in P\}$.

1.6. Придумайте разумное определение семейства полунорм на пространстве $C^\infty(M)$, где M — гладкое многообразие. (На лекции это было проделано для случая, когда M — отрезок прямой или открытое множество в $\mathbb{R}^n$.)

1.7. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Докажите, что компактно-открытая топология на пространстве голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.

1.8. Пусть X — векторное пространство и $S \subset X$ — непустое подмножество. Докажите, что
(1) $\mathrm{conv}(S) = \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in S,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\Big\}$;
(2) $\mathrm{circ}(S) = \Big\{\lambda x : x \in S,\ \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leqslant 1\Big\}$;
(3) $\Gamma(S) = \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in S,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N}\Big\}$.

1.9. Пусть S — подмножество топологического векторного пространства X. Докажите, что
(1) если S выпукло, то его замыкание $\overline{S}$ и внутренность $\mathrm{Int}\, S$ выпуклы;
(2) если S закруглено, то $\overline{S}$ закруглено, а если вдобавок $0 \in \mathrm{Int}\, S$, то и $\mathrm{Int}\, S$ закруглено;
(3) если S открыто, то $\mathrm{conv}(S)$ и $\Gamma(S)$ открыты, а если вдобавок $0 \in S$, то $\mathrm{circ}(S)$ открыто.

1.10. Докажите, что полунорма на векторном пространстве равна функционалу Минковского своего открытого единичного шара и своего замкнутого единичного шара.