5. МНОГОУГОЛЬНЫЕ РАЗБИЕНИЯ.

Конечным графом называется топологическое пространство X, полученное приклеиванием конечного числа отрезков (*ребер*) к конечному числу точек (*вершин*), причем каждый конец ребра приклеивается ровно к одной вершине, а точки внутри ребер никуда не приклеиваются. *Многугольным разбиением* или *тесселяцией* называется топологическое пространство, полученное приклеиванием конечного числа многоугольников (*граней*) $P_{k_1}, \dots, P_{k_m}$ (здесь P_i — правильный многоугольник с $i \geq 1$ сторонами) к конечному графу, причем внутренность каждой стороны многоугольника приклеивается гомеоморфно к внутренности ровно одного ребра графа, а вершина многоугольника — к соответствующему концу этого ребра (уточните!).

Если X — многоугольное разбиение, то пространство k-цепей $C_k(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ $(k = 0, 1, 2)$ — векторное пространство над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ из двух элементов, базис в котором составляют при $k = 0$ — вершины, при $k = 1$ — ребра, и при $k = 2$ — грани; мы будем опускать $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ в обозначениях. Дифференциал $\partial_1 : C_1(X) \to C_0(X)$ сопоставляет каждому ребру сумму его концов; дифференциал $\partial_2 : C_2(X) \to C_1(X)$ сопоставляет каждой грани сумму ребер, к которой приклеиваются ее стороны (если к ребру приклеиваются несколько сторон данной грани, то оно считается соответствующее количество раз).

Задача 1. а) Докажите, что $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$. б) Пусть X линейно связно. Докажите, что $v_1 + \dots + v_N \in C_0(X)$ (где все v_i — попарно различные вершины X) лежит в образе оператора $\partial_1(X)$ тогда и только тогда, когда N четно. в) Докажите, что набор ребер многоугольного разбиения X является 1-циклом (принадлежит ядру оператора ∂_1) тогда и только тогда, когда к каждой вершине набора примыкает четное число полуребер (два полуребра могут принадлежать одному и тому же ребру).

Векторные пространства (над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) $H_0(X) \stackrel{\text{def}}{=} C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$, $H_1(X) = \operatorname{Ker}\partial_1/\operatorname{Im}\partial_2$ и $H_2(X) = \operatorname{Ker}\partial_2$ называются гомологиями тесселяции X.

Задача 2. Постройте многоугольные разбиения, гомеоморфные а) букету k окружностей, б) произвольному графу, в) сфере S^2, г) букету k сфер, д) сфере с g ручками, е) ленте Мебиуса, ж) $\mathbb{R}P^2$, з) бутылке Клейна, и вычислите их гомологии. В случаях 2б и 2з постройте по крайней мере 2 различных разбиения и убедитесь, что их гомологии совпадают.

Задача 3. Элементарные операции над многоугольными разбианиями: а) поставить на ребре новую вершину; у примыкающих к ребру граней соответственно увеличивается количество сторон; б) разделить существующую грань на две, соединив две ее вершины новым ребром. Докажите, что при элементарных операциях гомологии многоугольного разбиения не меняются.

Задача 4. Докажите, что $\dim C_0(X) - \dim C_1(X) + \dim C_2(X) = \dim H_0(X) - \dim H_1(X) + \dim H_2(X) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(X)$ для любого многоугольного разбиения X.

Указание. При желании можете доказать аналогичную теорему для произвольного конечного комплекса конечномерных векторных пространств над любым полем.

Многоугольное разбиение называется (замкнутой) поверхностью, если

- к каждому ребру примыкает ровно две стороны граней (разных или одной и той же — неважно),
- для каждой вершины v входящие в нее полуребра циклически упорядочены так, что соседние в циклическом порядке полуребра принадлежат одной грани.

Задача 5. Докажите, что если X — линейно связная поверхность, то $\dim H_0(X) = 1$ и $\dim H_2(X) = 1$.

Цепь Штифеля–Уитни состоит из всех ребер на поверхности X, таких что две примыкающих к ребру грани определяют на нем одну и ту же ориентацию (уточните определение!).

Задача 6. а) Докажите, что цепь Штифеля–Уитни является циклом. б) Докажите, что при изменении ориентации любой грани (уточните, что это такое!) цикл Штифеля–Уитни заменяется на гомологичный. в) Докажите, что класс $w_1(X)$ гомологий цикла Штифеля–Уитни не меняется при элементарных операциях над многоугольными разбиениями.

Указание. Изменение ориентации грани — это определенное (уточните, какое!) изменение отношения, посредством которого соответствующий многоугольник P_k приклеивается к графу.

Пусть a и b — два цикла на поверхности X, не имеющие общих ребер, и v — их общая вершина. Разобьем полуребра a_i в a, входящие в вершину v, на пары (это возможно по пункту 1в), и то же самое сделаем

с циклом b. Обозначим $\infty(a,b;v)$ количество mod2 пар пар (sic!) (a_i,a_j) и (b_k,b_l) таких, что в четверке a_i,a_j,b_k,b_l полуребра, принадлежащие разным циклам, чередуются относительно циклического порядка в вершине v.

Задача 7. а) Докажите, что $\infty(a,b;v)$ не зависит от разбиения полуребер в вершине v на пары. б) Пусть $\infty(a,b)=\sum_v \infty(a,b;v)$ (сложение в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Докажите, что $(a,\partial_2 G)=0$ для любой 2-цепи $G\in C_2(X)$. в) Пусть $\alpha,\beta\in H_1(X)$. Докажите, что несколькими элементарными операциями из задачи 3 можно добиться, чтобы у классов смежности α,β были представители a,b, не имеющие общих ребер (случай $\alpha=\beta$ не исключается!). г) Пусть $\alpha,\beta\in H_1(X)$, и a,b — представители классов смежности α,β, не имеющие общих ребер. Докажите, что $(\alpha,\beta)\overset{\text{def}}{=}(a,b)\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ не зависит от выбора представителей, и так определенная функция $(\cdot,\cdot)$ является билинейной формой (формой пересечений) над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 8. а) Вычислите форму пересечений для тесселяций из задачи 2, являющихся поверхностями. б) Докажите, что форма пересечений для произвольной поверхности невырождена.

Задача 9. Пусть X — поверхность. Докажите, что а) для произвольного $\alpha\in H_1(X)$ имеет место равенство $(w_1(X),\alpha)=(\alpha,\alpha)$, где $w_1(X)$ — класс, определенный в задаче 6; б) $(w_1(X),w_1(X))=\chi(X) \bmod 2$, где $\chi(X)$ определено в задаче 4.