ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Теорема Брауэра. Степень отображения. Относительные гомологии.

Теорема 1 (Брауэра)**.** *Любое непрерывное отображение n-мерного шара в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть B_n — n-мерный шар, $f : B_n \to B_n$ — отображение без неподвижной точки. Тогда обозначим $F(x)$ точку пересечения луча с началом в точке $f(x)$, проходящего через x, с границей шара $\partial B = S^{n-1}$. Тем самым F — непрерывное отображение $B_n \to S^{n-1}$, причем $F(x) = x$ при $x \in S^{n-1}$.

Пусть $\iota : S^{n-1} \to B_n$ — тавтологическое вложение. Тогда $F \circ \iota = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$, откуда $F_* \circ \iota_* = \mathrm{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$, т.е. тождественное отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Но F_* отображает $H_{n-1}(S^{n-1})$ в $H_{n-1}(B_n) = 0$ — противоречие. □

Теорема 2. *Если $m \neq n$, то пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны.*

Доказательство. Без ограничения общности $m > n$. Если $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны, то гомеоморфны и пространства $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ и $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (почему?). Если $n = 1$, то эти пространства не гомеоморфны, поскольку первое линейно связно, а второе нет. Пусть теперь $n > 1$. Пространства $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ и $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентны сферам S^{m-1} и S^{n-1} соответственно. Но эти сферы не гомотопически эквивалентны, поскольку $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$, но $H_{n-1}(S^{m-1}) = 0$. □

Пусть $f : S^n \to S^n$ — непрерывное отображение. Тогда $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ является гомоморфизмом $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, то есть умножением на целое число d, называемое степенью отображения f.

Некоторые очевидные свойства степени отображения:

1) Степени гомотопных отображений равны (поскольку f_* не меняется при гомотопиях). На самом деле верно и обратное, но мы этого доказывать не будем.
2) Степень тождественного отображения равна 1.
3) Степень постоянного отображения (образ которого — какая-то точка a) равна нулю. Действительно, если $f(x) = a$ для всех $x \in S^n$, то $f = r_a \circ \mu$, где $\mu : S^n \to \mathrm{pt}$ — отображение S^n в пространство из одной точки, а $r_a : \mathrm{pt} \to S^n$ — отображение, переводящее эту точку в a. Тогда $f_* = (r_a)_* \circ \mu_*$; но $\mu_* : H_n(S^n) \to H_n(\mathrm{pt}) = 0$.

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ — подмножество (с топологией подмножества), $\iota : A \to X$ — тавтологическое вложение. Тогда отображение $\iota_* : \mathcal{C}(A) \to \mathcal{C}(X)$ (каждой сингулярной цепи в A сопоставляется она сама, но уже как цепь в X) — морфизм цепных комплексов пространств X и A. Для произвольного n рассмотрим абелеву группу $\mathcal{C}_n(X, A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{C}_n(X)/(\iota_*\mathcal{C}(A))$, и пусть $p_n : \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_n(X, A)$ — стандартная проекция на фактор. Тогда при любом n возникает точная последовательность абелевых групп $0 \to \mathcal{C}_n(A) \xrightarrow{\iota_*} \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{p_n} \mathcal{C}_n(X, A) \to 0$.

Лемма 1. *Пусть*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & A_1 & \xrightarrow{\iota_1} & B_1 & \xrightarrow{p_1} & C_1 & \to 0 \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & \\ 0 \to & A_2 & \xrightarrow{\iota_2} & B_2 & \xrightarrow{p_2} & C_2 & \to 0 \end{array}$$

— коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов, строки которой — точные последовательности. Тогда существует и единствен гомоморфизм $\gamma : C_1 \to C_2$, при котором диаграмма остается коммутативной.

Доказательство. Из точности вытекает, что p_1 — эпиморфизм, т.е. для произвольного элемента $c \in C_1$ существует $b \in B_1$ такое, что $c = p_1(b)$. Положим по определению $\gamma(c) = p_2(\beta(b))$ — из коммутативности диаграммы вытекает, что другой возможности и нет. Корректность определения: если $c = p_2(b')$, то из точности вытекает, что $b' = b + \iota_1(a)$ для некоторого $a \in A_1$, откуда $p_2(\beta(b')) = p_2(\beta(b)) + p_2(\beta(\iota_1(a))) = p_2(\beta(b)) + p_2(\iota_2(\alpha(a)))$ (в силу коммутативности диаграммы) $= p_2(\beta(b))$ (поскольку $p_2 \circ \iota_2 = 0$). □

Следствие 1. *Для каждого n существует гомоморфизм $\partial_n^{(X,A)} : \mathcal{C}_n(X, A) \to \mathcal{C}_{n-1}(X, A)$ такой, что последовательность $\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}^{(X,A)}} \mathcal{C}_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n^{(X,A)}} \mathcal{C}_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n-1}^{(X,A)}} \ldots$ является комплексом, а набор отображений p_n — морфизмом комплексом $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X, A)$.*

Доказательство. Существование (и единственность) гомоморфизма $\gamma = \partial_n^{(X,A)}$ вытекает из леммы, где $A_1 = \mathcal{C}_n(A)$, $B_1 = \mathcal{C}_n(X)$, $C_1 = \mathcal{C}_n(X,A)$, $A_2 = \mathcal{C}_{n-1}(A)$, $B_2 = \mathcal{C}_{n-1}(X)$, $C_2 = \mathcal{C}_{n-1}(X,A)$, ι и p — как определено выше, $\alpha = \partial_n^A$, $\beta = \partial_n^X$.

Комплекс: пусть $c = p_*(b)$, тогда $(\partial_n^{(X,A)} \circ \partial_{n-1}^{(X,A)})(c) = p_*(\partial_n^X(\partial_{n-1}^X b)) = p_*(0) = 0$. □

Гомологии комплекса $\mathcal{C}(X,A)$ называются относительными гомологиями X по A и обозначаются $H_n(X,A)$. Согласно теореме Бокштейна, имеется точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(A) \xrightarrow{\iota_{*,n}} H_n(X) \xrightarrow{p_{*,n}} H_n(X,A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \to \dots$, называемая точной последовательностью пары (X,A).

Пример 1. Пусть X — произвольное топологическое пространство, а $A = \{a\}$ состоит из одной точки $a \in X$. Тогда при $n > 1$ в точной последовательности пары (X,A) имеется фрагмент $0 = H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) = 0$, откуда $H_n(X,A)$ изоморфно $H_n(X)$. Если $n = 1$, то фрагмент имеет вид $0 \to H_1(X) \to H_1(X,A) \to H_0(A) = \mathbb{Z}$. Любой элемент $\beta \in H_1(X,A)$ — класс гомологий относительного цикла b, т.е. такой 1-цепи $b \in \mathcal{C}_1(X)$, для которой $\partial_1^X b$ лежит в A. Но если граница 1-цепи содержит только одну точку, то она равна нулю (докажите!), откуда вытекает, что гомоморфизм $H_1(X,A) \to H_0(A)$ в точной последовательности пары — нулевой. Следовательно, $H_1(X,A)$ изоморфно $H_1(X)$. При $n = 0$ фрагмент выглядит как $\mathbb{Z} = H_0(A) \to H_0(X) \to H_0(X,A) \to 0$. Группа $H_0(X)$ порождена компонентами линейной связности пространства X; отображение $\mathbb{Z} = H_0(A) \to H_0(X)$ переводит 1 в компоненту (образующую $H_0(X)$), содержащую точку a. Следовательно, группа $H_0(X,A)$ порождена всеми компонентами линейной связности X, кроме содержащей точку a; в частности, если X линейно связно, то $H_0(X,A) = 0$.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, и $f(A) \subset B \subset Y$. Тогда возникает коммутативная диаграмма комплексов

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathcal{C}(A) & \xrightarrow{\iota_*} & \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{p_*} & \mathcal{C}(X,A) & \to 0 \\ & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & & \\ 0 \to & \mathcal{C}(B) & \xrightarrow{\iota_*} & \mathcal{C}(Y) & \xrightarrow{p_*} & \mathcal{C}(Y,B) & \to 0 \end{array},$$

и из леммы 1 вытекает, что существует и единствен морфизм комплексов $f_* : \mathcal{C}(X,A) \to \mathcal{C}(Y,B)$, для которого диаграмма остается коммутативной. Морфизм комплексов порождает для каждого n морфизм гомологий $f_{*,n} : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$.

Теорема 3. *Пусть $f_t : X \to Y$ — гомотопия отображений, причем $f_t(A) \subset B$ при всех $0 \le t \le 1$. Тогда гомоморфизмы $(f_0)_{*,n}$ и $(f_1)_{*,n}$ относительных гомологий $H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ совпадают.*

Доказательство. Соответствующий результат для обычных гомологий вытекает из существования цепной гомотопии — набора гомоморфизмов $\mu_n : \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n+1}(Y)$ такого, что $\partial_{n+1}^Y \mu_n + \mu_{n-1}\partial_n^X = (f_1)_{*,n} - (f_0)_{*,n}$. Нетрудно убедиться, что ограничение μ_n на $\mathcal{C}_n(A)$ является цепной гомотопией $\mathcal{C}_n(A) \to \mathcal{C}_{n+1}(B)$. Применяя лемму 1 к точным последовательностям $0 \to \mathcal{C}_n(A) \to \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_n(X,A) \to 0$ и $0 \to \mathcal{C}_{n+1}(B) \to \mathcal{C}_{n+1}(Y) \to \mathcal{C}_{n+1}(Y,B) \to 0$, получим набор гомоморфизмов $\mu_n : \mathcal{C}_n(X,A) \to \mathcal{C}_{n+1}(Y,B)$, который также является цепной гомотопией. Следовательно, гомоморфизм $(f_1)_* - (f_0)_* : \mathcal{C}_n(X,A) \to \mathcal{C}_n(Y,B)$ порождает нулевой гомоморфизм в гомологиях. □