ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Точные последовательности комплексов. Гомологии цепей, подчиненных покрытию.

Точной последовательностью называется набор групп и гомоморфизмов $\dots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_1} A_0$, для которой $\operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} f_{n-1}$ для всех n. Иными словами, точная последовательность это комплекс с тривиальными гомологиями. Точная последовательность комплексов определяется так же, только A_n — комплексы, а f_n — морфизмы комплексов.

Теорема 1 (Бокштейна)**.** *Пусть $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ — точная последовательность комплексов. Тогда для всех n существуют гомоморфизмы $\delta_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ такие, что последовательность гомологий $\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{f_{*,n}} H_n(B) \xrightarrow{g_{*,n}} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_{*,n-1}} \dots$ — точная.*

Доказательство. Докажем сначала точность в члене B_n (это не требует построения гомоморфизмов δ); это означает, что $\operatorname{Im} f_{*,n} = \operatorname{Ker} g_{*,n}$. Пусть $\tilde b = f_{*,n}(\tilde a) \in \operatorname{Im} f_{*,n}$, где $\tilde a \in H_n(A)$ — класс смежности, представленный элементом $a \in \mathcal{Z}_n(A) \subset A_n$. Тогда $g_{*,n}(\tilde b) \in H_n(C)$ — класс смежности, представленный элементом $g_n(f_n(a)) = 0$, то есть $g_{*,n} \circ f_{*,n} = 0$, то есть $\operatorname{Im} f_{*,n} \subseteq \operatorname{Ker} g_{*,n}$. Обратное включение: пусть $\tilde b \in \operatorname{Ker} g_{*,n}$ — класс смежности, представленный элементом $b \in \mathcal{Z}_n(B) \subset B_n$. Тогда $g_{*,n}(\tilde b) = 0$ представлен элементом $g_n(b)$. Иными словами $g_n(b) \in \mathcal{B}_n(C)$, то есть существует $x \in C_{n+1}$ такой, что $g_n(b) = \partial^C_{n+1} x$. Поскольку $g_{n+1} : B_{n+1} \to C_{n+1}$ — эпиморфизм, существует $y \in B_{n+1}$ такой, что $g_{n+1} y = x$. Следовательно, $g_n \partial^B_{n+1} y = \partial^C_{n+1} g_n y = c = g_n b$. Следовательно, $g_n(b - \partial^B_{n+1} y) = 0$. В силу равенства $\operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} g_n$ получаем, что существует $z \in A_n$ такой, что $b - \partial^B_{n+1} y = f_n z$. При этом $f_{n-1}\partial^A_n z = \partial^B_n f_n z = \partial^B_n (b - \partial^B_{n+1} y) = 0$ (в силу $b \in \mathcal{Z}_n(B)$ и $\partial^B_n \partial^B_{n+1} = 0$). Поскольку $f_{n-1} : A_{n-1} \to B_{n-1}$ — мономорфизм, отсюда вытекает, что $\partial^A_n z = 0$, то есть $z \in \mathcal{Z}_n(A)$. Теперь z представляет некоторый класс смежности $\tilde z \in H_n(A)$, для которого $f_{*,n}(\tilde z)$ — класс, представленный $b - \partial^B_{n+1} y$, то есть $\tilde b$. Тем самым $\tilde b \in \operatorname{Im} f_{*,n}$, и точность в члене B_n доказана.

Построим теперь *связывающий гомоморфизм* δ_n. Пусть $\tilde c \in H_n(C)$ — класс, представленный элементом $c \in \mathcal{Z}_n(C)$. Поскольку $g_n : B_n \to C_n$ — эпиморфизм, существует элемент $b \in B_n$ такой, что $g_n(b) = c$. Пусть $x = \partial^B_n b$. Тогда $g_{n-1} x = g_{n-1}\partial^B_n b = \partial^C_n g_n b = \partial^C_n c = 0$. В силу равенства $\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} g_{n-1}$ существует $y \in A_{n-1}$ такой, что $f_n y = x$. При этом $f_{n-2}\partial^A_{n-1} y = \partial^B_{n-1} f_n y = \partial^B_{n-1} x = 0$ (в силу $\partial^B_{n-1}\partial^B_n = 0$); поскольку f_{n-2} — мономорфизм, отсюда вытекает, что $\partial^A_{n-1} y = 0$. Тем самым $y \in \mathcal{Z}_{n-1}(A)$ представляет смежный класс $\tilde y \in H_{n-1}(A)$; положим по определению $\tilde y \stackrel{\text{def}}{=} \delta_n(\tilde c)$.

Проверим корректность определения δ_n. Элемент b такой, что $g_n b = c$, не единствен: пусть $g_n b' = c$ для некоторого b'. Тогда $g_n(b' - b) = 0$, то есть $b' - b \in \operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Im} f_n$. Тем самым существует $t \in A_n$ такой, что $b' = b + f_n t$. Теперь $x' \stackrel{\text{def}}{=} \partial^B_n b' = x + \partial^B_n f_n t = x + f_{n-1}\partial^A_n t = f_{n-1}(y + \partial^A_n t)$. Смежный класс в $\mathcal{Z}_{n-1}(A)$, порожденный элементом $y + \partial^A_n t$, тот же, что и для y, т.е.$\tilde y$ — следовательно, от выбора b класс $\tilde y$ не зависит.

Представитель $c \in \mathcal{Z}_n(C)$ класса $\tilde c$ также не единствен: пусть $c' = c + \partial^C_{n+1} u$ (для некоторого $u \in C_{n+1}$) — другой представитель. Поскольку $g_{n+1} : B_{n+1} \to C_{n+1}$ — эпиморфизм, существует $v \in B_{n+1}$ такой, что $g_{n+1} v = u$. Тогда $g_n(b + \partial^B_{n+1} v) = c + \partial^C_{n+1} g_n v = c + \partial^C_{n+1} u = c'$ — следовательно, в качестве прообраза c' при отображении g_n мы можем выбрать $b' \stackrel{\text{def}}{=} b + \partial^B_{n+1} v$ (выше доказано, что от выбора прообраза результат не зависит). Теперь $x' \stackrel{\text{def}}{=} \partial^B_n b' = \partial^B_n b = x$, и значение $\delta_n(\tilde c)$ не меняется, и корректность определения гомоморфизма $\delta_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ доказана.

Упражнение. Завершите доказательство, проверив точность построенной последовательности в членах A_n и C_n

□

Пусть X — топологическое пространство; $\mathcal{U} = \{U_i, i = 1, \dots, N\}$ — открытое его покрытие: $X = \bigcup_{i=1}^N U_i$, и $U_i \subset X$ — открытые множества. Обозначим $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}_n(X) \subset \mathcal{C}_n(X)$ свободную абелеву группу, порожденную всеми сингулярными симплексами $\varphi : \Delta_n \to X$ такими, что $\varphi(\Delta_n) \subset U_i$ для некоторого i. Очевидно, $\partial_n(\mathcal{C}^{\mathcal{U}}_n(X)) \subset \mathcal{C}^{\mathcal{U}}_{n-1}(X)$, то есть $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)$ — подкомплекс сингулярного комплекса $\mathcal{C}(X)$, а набор тавтологических вложений $\varrho_n : \mathcal{C}^{\mathcal{U}}_n(X) \to \mathcal{C}_n(X)$ (каждой цепи из $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}_n(X)$ сопоставляется она сама, но уже как элемент $\mathcal{C}_n(X)$) — морфизм комплексов.

Для любой пары $U \subset X$ обозначим $\iota_{U.X} : U \to X$ тавтологическое вложение (каждой точке U сопоставляется она сама, но как элемент X). Предположим для простоты, что покрытие $\mathcal{U}$ состоит из двух множеств: $X = U_1 \cup U_2$. Обозначим $q_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\iota_{U_1,X})_* \oplus 0 : \mathcal{C}_n(U_1) \oplus \mathcal{C}_n(U_2) \to \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)$; аналогично q_2.

Теорема 2. *Последовательность комплексов* $0 \to \mathcal{C}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{(\iota_{U_1\cap U_2,U_1})_* \oplus (\iota_{U_1\cap U_2,U_2})_*} \mathcal{C}(U_1) \oplus \mathcal{C}(U_2) \xrightarrow{q_1 - q_2} \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X) \to 0$ *— точная.*

Доказательство.

Точность в члене $\mathcal{C}(U_1 \cap U_2)$. Равенство $(\iota_{U_1\cap U_2,U_1})_*(\alpha) \oplus (\iota_{U_1\cap U_2,U_2})_*(\alpha) = 0 \in \mathcal{C}_n(U_1) \oplus \mathcal{C}_n(U_2)$, где $\alpha \in \mathcal{C}_n(U_1 \cap U_2)$, означает, что $(\iota_{U_1\cap U_2,U_1})_*(\alpha) = 0$ и $(\iota_{U_1\cap U_2,U_2})_*(\alpha) = 0$. Поскольку $\iota_{U_1\cap U_2,U_1}$ и $\iota_{U_1\cap U_2,U_2}$ — тавтологические вложения, это возможно только при $\alpha = 0$. Тем самым $(\iota_{U_1\cap U_2,U_1})_* \oplus (\iota_{U_1\cap U_2,U_2})_*$ инъективно, что и означает точность.

Точность в члене $\mathcal{C}_n(U_2) \oplus \mathcal{C}_n(U_2)$. Имеем $\iota_{U_1,X} \circ \iota_{U_1\cap U_2,U_1} = \iota_{U_1\cap U_2,X} = \iota_{U_2,X} \circ \iota_{U_1\cap U_2,U_2}$. Отсюда $(q_1 - q_2) \circ ((\iota_{U_1\cap U_2,U_1})_* \oplus (\iota_{U_1\cap U_2,U_2})_*) = 0$, так что $\operatorname{Im}((\iota_{U_1\cap U_2,U_1})_* \oplus (\iota_{U_1\cap U_2,U_2})_*) \subset \operatorname{Ker}(q_1 - q_2)$. Для доказательства обратного включения заметим, что если $\alpha \in \mathcal{C}_n(U_1)$ и $\beta \in \mathcal{C}_n(U_2)$ таковы, что $(q_1 - q_2)(\alpha \oplus \beta) = 0$, то есть $(\iota_{U_1,X})_*(\alpha) = (\iota_{U_2,X})_*(\beta)$, то для каждого сингулярного симплекса в α найдется равный ему сингулярный симплекс в β, и наоборот. Т.е. все сингулярные симплексы в α и β одинаковы, и образы их лежат в $U_1 \cap U_2$. Следовательно, найдется $\psi \in \mathcal{C}_n(U_1 \cap U_2)$ такая, что $\alpha = (\iota_{U_1\cap U_2,U_1})_*\psi$ и $\beta = (\iota_{U_1\cap U_2,U_2})_*\psi$. Таким образом $\alpha \oplus \beta \in \operatorname{Im}((\iota_{U_1\cap U_2,U_1})_* \oplus (\iota_{U_1\cap U_2,U_2})_*)$, и обратное включение доказано.
Точность в члене $\mathcal{C}_n^{\{X,Y\}}(X \cup Y)$ означает, что отображение $q_1 - q_2 : \mathcal{C}_n(U_1) \oplus \mathcal{C}_n(U_2) \to \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)$ — эпиморфизм, что очевидно по определению $\mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)$. □

Комплекс $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)$ употребляется при подсчете гомологий пространства X (т.е. комплекса $\mathcal{C}(X)$) ввиду следующей теоремы:

Теорема 3. *Отображение* $\varrho_{*,n} : H_n(\mathcal{C}^{\mathcal{U}}) \to H_n(\mathcal{C})$ *является изоморфизмом при всех* n.

Для доказательства теоремы нам потребуется ряд технических утверждений.

Барицентрическим подразделением стандартного симплекса Δ_n называется разбиение $\Delta_n = \bigcup_{\sigma \in S_{n+1}} \Delta_\sigma$; здесь S_{n+1} — множество перестановок точек $0, \dots, n$, а $\Delta_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}\}$.

Упражнение 1. Докажите, что $\Delta_\sigma = \operatorname{Conv}(b_{\sigma,0}, \dots, b_{\sigma,n})$, где $b_{\sigma,k} = (x_0, \dots, x_n)$, где $x_{\sigma(0)} = \dots = x_{\sigma(k)} = 1/(k+1)$ и $x_i = 0$ для всех остальных $1 \leq i \leq n$.

Следствие 1 (упражнения 1). *1) Отображение* $A_{b_{\sigma,0},\dots,b_{\sigma,n}} : \Delta_n \to \Delta_\sigma$ *взаимно однозначно.*

2) Каждая вершина барицентрического подразделения Δ_n *имеет вид* $b_I = (x_{I,1}, \dots, x_{I,n})$, *где* $I \subseteq \{0, \dots, n\}$, *и* $x_{I,k} = 1/|I|$ *при* $k \in I$ *и* $x_{I,k} = 0$ *при* $k \notin I$. *Вершины* $b_{I_0}, \dots, b_{I_k}$ *являются вершинами некоторой* k*-мерной грани, если* $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_k$ *и* $|I_s| = n - k + s$ *для всякого* s. *Эквивалентное условие: существует перестановка* $\sigma \in S_{n+1}$ *такая, что* $b_{I_s} = b_{\sigma,n-k+s}$ *для всех* s.

Гомоморфизм $\beta_n : \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_n(X)$ определяется на образующей $\varphi : \Delta_n \to X$ формулой $\beta(\varphi) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma)} \varphi \circ A_{p_{\sigma,0},\dots,p_{\sigma,n}}$; здесь $\operatorname{sign}(\sigma)$ — четность перестановки σ.

Лемма 1. *Существует такой набор гомоморфизмов* $D_n : \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n+1}(X)$, *что* $1 - \beta_n = \partial_{n+1} D_n + D_{n-1} \partial_n$.

Разобьем призму $\Delta_n \times [0,1]$ на симплексы следующим образом (по индукции): если $n = 0$, то $\Delta_0 \times [0,1] = [0,1]$ уже является 1-симплексом, разбиение тривиально. При прочих n сначала разобьем все боковые грани призмы — они представляют собой $\Delta_{n-1} \times [0,1]$ — а затем построим на каждом из полученных симплексов пирамиду с вершиной в центре $c = (b_{\{0,\dots,n\}}, 1)$ верхнего основания $\Delta_n \times \{1\}$. Все эти пирамиды представляют собой $(n+1)$-мерные симплексы, а оставшаяся часть призмы состоит из точек a таких, что луч ca покидает призму не в точке боковой грани, а в точке нижнего основания. Тем самым оставшиеся точки образуют пирамиду с вершиной c, основанием которой является нижнее основание призмы — опять-таки, это $(n+1)$-мерный симплекс. При данном разбиении нижнее основание призмы остается нетронутым, а на верхнем возникает барицентрическое подразделение. Вершинами данного разбиения призмы будут вершины $p_0 = ((1,0,\dots,0),0), \dots, p_n = ((0,\dots,0,1),0)$ нижнего основания $\Delta_n \times \{0\}$ и вершины $q_I = (b_I, 1)$ барицентрического подразделения верхнего основания $\Delta_n \times \{1\}$; здесь $I \subseteq \{0, \dots, n\}$.

Упражнение 2. а) Докажите, что для каждого симплекса S построенного разбиения существует $\sigma \in S_{n+1}$ и $k = 0, \dots, n$ такие, что вершины S это $p_{\sigma(0)}, \dots, p_{\sigma(k)}$ и $q_{\sigma,k+1}, \dots, q_{\sigma,n}$; обозначим такой симплекс $\Sigma_{\sigma,k}$. б) Докажите, что $\Sigma(\sigma_1, k) = \Sigma(\sigma_2, l)$ тогда и только тогда, когда $k = l$ и $\sigma_1(i) = \sigma_2(i)$ при всех $i = 0, \dots, k$. Тем самым можно считатать (и мы так будем делать), что в обозначении $\Sigma(\sigma, k)$ перестановка σ обладает свойством $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$.

Тем самым отображение $\Lambda_{\sigma,k} \stackrel{\text{def}}{=} A_{p_{\sigma(0)},\dots,p_{\sigma(k)},q_{\sigma,k+1},\dots,q_{\sigma,n}} : \Delta_{n+1} \to \Sigma(\sigma,k)$ является взаимно однозначным. Пусть теперь $\varphi : \Delta_n \to X$ — сингулярный симплекс; определим отображение $\tilde\varphi : \Delta_n \times [0,1] \to X$ как композицию φ и проекции $\Delta_n \times [0,1] \to \Delta_n$ призмы на основание. Положим по определению $D_n(\varphi) = \sum_{\sigma,k}(-1)^{\mathrm{odd}(\sigma)+k}\tilde\varphi \circ \Lambda(\sigma,k) \in \mathcal{C}_{n+1}(X)$; затем продолжим D_n по линейности до гомоморфизма $\mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n+1}(X)$.

Доказательство леммы 1. Отображение D_n определено выше. Для произвольного сингулярного симплекса $\varphi : \Delta_n \to X$ цепь $\partial_{n+1}D_n(\varphi)$ равна сумме (с соответствующими знаками) ограничений $\tilde\varphi$ на n-мерные грани симплексов $\Sigma(\sigma,k)$. Набор вершин такой грани получается вычеркиванием одного из членов последовательности $p_{\sigma(0)},\dots,p_{\sigma(k)},q_{\sigma,k},\dots,q_{\sigma,n}$; рассмотрим несколько случаев.

1. Вычеркнутый член — $p_{\sigma(i)}$, при этом $k > 0$.

Упражнение 3. а) Докажите, что полученная грань является внутренней гранью разбиения призмы, то есть принадлежит двум симплексам — $\Sigma(\sigma,k)$ и $\Sigma(\sigma\cdot(i,k),k-1)$, где символом (i,k) обозначена транспозиция i и k, а умножение $\sigma\cdot(i,k)$ производится в группе S_{n+1}. б) Докажите также, что соответствующие члены в $\partial_{n+1}D_n(\varphi)$ имеют противоположные знаки и, таким образом, сокращаются.

2. Вычеркнутый член — $q_{\sigma,k}$, при этом $k < n$.

Упражнение 4. Докажите, что в этом случае грань также является внутренней — принадлежит симплексам $\Sigma(\sigma,k)$ и $\Sigma(\sigma,k+1)$, и что соответствующие члены в $\partial_{n+1}D_n(\varphi)$ также сокращаются.

3. Вычеркнутый член — $q_{\sigma,m}$, где $k < m < n$.

Упражнение 5. Докажите, что и в этом случае грань также является внутренней — принадлежит симплексам $\Sigma(\sigma,k)$ и $\Sigma(\sigma\cdot(m+1,k),k)$, и что соответствующие члены в $\partial_{n+1}D_n(\varphi)$ также сокращаются.

4. Вычеркнутый член — $q_{\sigma,n}$, при этом $k < n$. В этом случае грань принадлежит только одному симплексу, $\Sigma(\sigma,k)$, и является подмножеством боковой грани $\Delta_{n,\sigma(n)}\times[0,1]$ призмы (т.е. для всех точек грани координата $x_{\sigma(n)} = 0$). Соответствующий член в $\partial_{n+1}D_n(\varphi)$, тем самым, встречается и в $D_{n-1}\partial_n(\varphi)$.

Упражнение 6. Докажите, что знаки, с которыми этот член входит в $\partial_{n+1}D_n(\varphi)$ и в $D_{n-1}\partial_n(\varphi)$, противоположны.

5. Вычеркнутый член — $q_{\sigma,n}$, при этом $k = n$ (тем самым σ — единичный элемент в S_{n+1}). Соответствующая грань — нижнее основание призмы, так что соответствующий член в $\partial_{n+1}D_n(\varphi)$ равен φ.

6. Вычеркнутый член — $p_{\sigma(0)}$, при этом $k = 0$. Соответствующая грань — симплекс $\Delta_\sigma \subset \Delta_n \times \{1\}$ барицентрического подразделения верхней грани.

Упражнение 7. Докажите, что знак, с которыми соответствующий член входит в $\partial_{n+1}D_n(\varphi)$ и $\beta_n(\varphi)$, противоположны.

Суммируя все случаи, получим утверждение леммы. □

Следствие 2. *Набор отображений β_n является морфизмом комплексов $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$; соответствующее отображение в гомологиях $\beta_{*,n} = \mathrm{Id}_{H_n(X)}$.*

Доказательство. Вытекает из леммы 5 лекции 10. □

Лемма 2. *Пусть $f : \Delta_n \to X$ — сингулярный симплекс. Тогда существует $N > 0$ такое, что $\beta^N(f) = (\varrho_n)_*(x)$ для некоторой сингулярной цепи $x \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)$ (где, напомним, $\varrho_n : \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X) \to \mathcal{C}_n(X)$ — тавтологическое вложение).*

Для доказательства нам потребуется комбинаторное утверждение. Напомним, что деревом называется связный граф без циклов.

Лемма 3. *Пусть T — бесконечное дерево, в котором каждая вершина имеет конечную валентность. Тогда T содержит бесконечную последовательность попарно различных вершин $v_0, v_1, v_2, \dots$, в которой для каждого n вершины v_n и v_{n+1} соединены ребром.*

Доказательство. Выделим одну из вершин дерева и назовем ее корнем. Между любыми двумя вершинами дерева имеется ровно один путь по ребрам без повторений (докажите!); назовем уровнем $\ell(v)$ вершины v длину такого пути, связывающего v с корнем. Потомками вершины v уровня n назовем вершины уровня $n+1$, соединенные с нею ребром, а родителем — (единственную) вершину уровня $n-1$, соединенную с v ребром.

Последовательность $v_1,\dots,v_k$ вершин дерева назовем простым путем, если $\ell(v_1) < \ell(v_2) < \dots < \ell(v_k)$ (в частности, все вершины попарно различны), и для каждого n вершины v_n и v_{n+1} соединены ребром (отсюда

следует, что $\ell(v_i) = \ell(v_{i-1}) + 1$ для всех i). Назовем вершину v перспективной, если через нее проходит бесконечное количество простых путей (различной длины).

Очевидно, корень дерева является перспективной вершиной: если бы через него проходило лишь конечное число простых путей, их длина была бы ограничена сверху, и тем самым начиная с некоторого N в дереве T не было бы вершин на уровне $n > N$, что противоречит бесконечности T. Пусть теперь v_n — перспективная вершина уровня n. Тогда все вершины $v_{n-1}, \dots, v_0$, через которые проходит простой путь, соединяющий v_n с корнем v_0, являются перспективными. Среди потомков v_n, очевидно, также содержится перспективная вершина (в частности, множество потомков не может быть пусто), обозначим ее v_{n+1}. Последовательность $v_0, v_1, \dots$ доказывает лемму. □

Доказательство леммы 2. Цепь $\beta^N(f)$ содержит сингулярные симплексы $f_{\sigma_1,\dots,\sigma_N}$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in S_{n+1}$, полученные из f ограничением на симплексы N-кратного барицентрического подразбиения. Если лемма неверна, то для произвольного N найдутся $\sigma_1^{(N)}, \dots, \sigma_N^{(N)} \in S_{n+1}$ такие, что образ $f_{\sigma_1^{(N)},\dots,\sigma_N^{(N)}}$ не лежит ни в одном U_i (то есть $f_{\sigma_1^{(N)},\dots,\sigma_N^{(N)}}$ не содержится в образе ϱ). Очевидно, что тогда для всякого $k < N$ симплекс $f_{\sigma_1^{(N)},\dots,\sigma_k^{(N)}}$ также не лежит в $\operatorname{Im}\varrho$. Следовательно, всевозможные наборы $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ такие, что $f_{\sigma_1,\dots,\sigma_N} \notin \operatorname{Im}(\varrho)$, образуют набор вершин бесконечного дерева, в котором вершины $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ и $(\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1})$ соединены ребром.

Согласно лемме 3, существует бесконечная последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ такая, что $f_{\sigma_1,\dots,\sigma_N} \notin \operatorname{Im}(\varrho)$. Симплексы $\Delta_{\sigma_1,\dots,\sigma_N}$ N-кратного барицентрического подразделения Δ_n компактны и вложены: $\Delta_{\sigma_1,\dots,\sigma_N} \subset \Delta_{\sigma_1,\dots,\sigma_{N-1}}$, откуда $\bigcap_N \Delta_{\sigma_1,\dots,\sigma_N} \neq \varnothing$. Пусть a — точка этого пересечения (на самом деле она единственна). Тогда $f(a) \in U_i \subset X$ для некоторого i. Диаметр симплекса $\Delta_{\sigma_1,\dots,\sigma_N}$ стремится к нулю при $N \to \infty$ (докажите!). Из открытости множества U_i и непрерывности f вытекает, что образ $f(\Delta_{\sigma_1,\dots,\sigma_N}) \subset U_i$ для достаточно большого N, что противоречит построению последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. □

Доказательство теоремы 3. Докажем сначала, что $\varrho_{*,n} : H_n(\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)) \to H_n(X)$ — эпиморфизм. Пусть $\alpha \in H_n(X)$ — класс когомологий, представленный циклом $x \in \operatorname{Ker} \partial_n^{\mathcal{C}(X)}$. Поскольку в него входит конечное число сингулярных симплексов, из леммы 2 вытекает, что при достаточно большом N существует $\tilde{x} \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)$ такое, что $\beta_n^N x = \varrho_n(\tilde{x})$. Поскольку β и ϱ — морфизмы комплексов, получим $\varrho_n(\partial_n^{\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)}\tilde{x}) = \partial_n^{\mathcal{C}(X)}\varrho_n(x) = \partial_n^{\mathcal{C}(X)}\beta_n^N x = \beta_n^N \partial_n^{\mathcal{C}(X)} x = 0$, откуда вытекает, что $\partial_n^{\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)}\tilde{x} = 0$ (ϱ_n — вложение). Таким образом, $\alpha = \varrho_{*,n}\tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha} \in H_n(\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X))$ — класс, представленный циклом $\tilde{x}$, что доказывает эпиморфность $\varrho_{*,n}$.

Теперь докажем, что $\varrho_{*,n}$ — мономорфизм. Пусть $\varrho_{*,n}\alpha = 0$, то есть $\varrho_n(x) = \partial_{n+1}y$ для некоторых $x \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)$, $y \in \mathcal{C}_{n+1}(X)$. Согласно лемме 1, $\partial_{n+1}y = \partial_{n+1}\beta_{n+1}y + \partial_{n+1}D_n\partial_{n+1}y = \partial_{n+1}\beta_{n+1}y + \partial_{n+1}D_n\varrho_n(x) = \partial_{n+1}\beta_{n+1}y + \partial_{n+1}\varrho_{n+1}D_n x$. Повторяя эту процедуру N раз, получим $\varrho_n(x) = \partial_{n+1}\beta_{n+1}^N y + \partial_{n+1}\varrho_{n+1}D_n(1 + \beta_n + \dots + \beta_n^{N-1})D_n x$. Если N таково, что $\beta_{n+1}^N y = \varrho_n(\tilde{y})$ для некоторого $\tilde{y} \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)$, получим $\varrho_n(x) = \partial_{n+1}\varrho_n(\tilde{y} + (1 + \beta_n + \dots + \beta_n^{N-1})x) = \varrho_n\partial_{n+1}^{\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)}(\tilde{y} + (1 + \beta_n + \dots + \beta_n^{N-1})x)$, откуда $x = \partial_{n+1}^{\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)}(\tilde{y} + (1 + \beta_n + \dots + \beta_n^{N-1})x)$. Тем самым класс когомологий $H_n(\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X))$, представляемый x, равен нулю, и мономорфность доказана. □