ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Теорема о накрывающей гомотопии.

Пусть даны топологические пространства E и B, дискретное топологическое пространство F и непрерывное отображение $p : E \to B$. Набор данных (E, B, F, p) называется накрытием, если p локально обратимо: для произвольной точки $b \in B$ существует открытое подмножество $U \subset B$, $b \in U$ (*тривиализующая окрестность*), и непрерывное отображение $\lambda : p^{-1}(U) \to F$ (*тривиализация*), такие что отображение $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times F$, заданное формулой $\Phi(x) = (p(x), \lambda(x))$, является гомеоморфизмом.

B называется базой накрытия, E — тотальным пространством, p — проекцией (или тоже накрытием), F — стандартным слоем. Поскольку дискретное пространство однозначно определяется своей мощностью, часто говорят о накрытии со слоем такой-то мощности (например, счетным).

Пример 1. Пусть $E = B \times F, p : E \to B$ — проекция прямого произведения на первый сомножитель: $p(b, s) \stackrel{\text{def}}{=} b$ ($b \in B$, $s \in F$, так что $(b, s) \in B \times F = E$). Тогда для произвольной точки $b \in B$ в качестве тривиализующей окрестности можно взять $U = B$, а в качестве тривиализации — проецию на второй сомножитель: $\lambda(b, s) \stackrel{\text{def}}{=} s$. Действительно, в этом случае $p^{-1}(U) = p^{-1}(B) = E$, и $\Phi(b, s) = (p(b, s), \lambda(b, s)) = (b, s)$ — тождественное отображение $E \to B \times F$.

Такое накрытие p называется тривиальным.

Таким образом, накрытие локально является проекцией прямого произведения на сомножитель (p^{-1} гомеоморфно $U \times F$). Глобально это, однако, не так (т.е. существуют накрытия, не эквивалентные тривиальным в смысле примера 1):

Пример 2. $E = \mathbb{R}$, $B = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, F — счетное дискретное пространство, $p : \mathbb{R} \to S^1$ — экспоненциальное отображение $p(t) = \exp(2\pi i t)$.

Для доказательства того, что (E, B, p, F) — накрытие, реализуем F как множество целых чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ с индуцированной топологией (она дискретна). Для произвольного $b \in S^1$ возьмем в качестве U дугу, содержащую b и точку $1 \in S^1$, такую что $U \neq S^1$. Тогда $p^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ — объединение счетного числа непересекающихся интервалов $(\alpha + n, \beta + n)$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1$, так что $n \in (\alpha + n, \beta + n)$, и других целых точек $(\alpha + n, \beta + n)$ не содержит. Положим по определению $\lambda(x) = n$, если $x \in (\alpha + n, \beta + n)$ (для каждой точки $x \in p^{-1}(U)$ такое n существует и единственно. Отображение Φ действует по формуле $\Phi(x) = (\exp(2\pi i x), \lambda(x))$; поскольку U гомеоморфно интервалу (α, β), а p^{-1} является несвязным объединением счетного числа таких интервалов, Φ — гомеоморфизм.

В то же время $\mathbb{R}$ не гомеоморфно $S^1 \times F$ ($\mathbb{R}$ линейно связно, а $S^1 \times F$ нет), так что этот пример не является частным случаем примера 1.

Пример 3. $E = S^n$, $B = \mathbb{R}P^n = S^n/(x \sim -x)$, F состоит из двух элементов, p — естественная проекция на факторпространство ($p(x)$ — пара, состоящая из точек x и $-x$). Доказательство того, что это накрытие, — упражнение.

Для произвольной точки $b \in B$ отображение $\Phi^{-1}\big|_{\{b\} \times F} : \{b\} \times F \to p^{-1}(b)$ — гомеоморфизм. Поскольку $\{b\} \times F$ гомеоморфно дискретному пространству F, прообраз $p^{-1}(b) \subset E$ также дискретен и гомеоморфен (т.е. равномощен) F. Поэтому часто при определении накрытия слой F не указывают явно — всегда можно взять $F = p^{-1}(b)$ для отмеченной точки $b \in B$.

Этого свойства, однако, недостаточно для того, чтобы (E, B, p, F) было накрытием:

Пример 4. $B = [-1, 1]$, а $E \subset \mathbb{R}^2$ состоит из отрезков $I_0 = \{(0, t) \mid t \in [-1, 0]\}$, $I_1 = \{(1, t) \mid t \in [-1, 0]\}$, $I_2 = \{(t, t) \mid t \in [0, 1]\}$ и $I_3 = \{(t, -t) \mid t \in [0, 1]\}$. Отрезки I_1, I_2 и I_3 имеют общую точку $(0, 0)$, а I_0 с ними общих точек не имеет. Отображение $p : E \to B$ — проекция $p(x, y) = x$.

Прообраз $p^{-1}(t)$ при любом t содержит 2 точки (и дискретен. Конечное подмножество метрического пространства — например, $\mathbb{R}^2$ — всегда дискретно). В то же время p не является накрытием: у точки $0 \in B$ не существует тривиализующей окрестности U (докажите!).

Пример 5. $E = B = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $p(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^n$. Для произвольной точки $b \neq 0$ в качестве тривиализующей окрестности возьмем угол U с вершиной в 0 величиной $\varphi < 2\pi/n^2$, содержащий b. Тогда $p^{-1}(U)$ — объединение n углов величиной $n\varphi < 2\pi/n$, отличающихся друг от друга поворотом на $2\pi/n$ и, следовательно, не пересекающихся. Тем самым $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times F$, где F — дискретное множество из n точек.

Пусть (E, B, p, F) — накрытие.

Теорема 1 (о накрывающей гомотопии). *Пусть заданы непрерывное отображение $f : [0,1]^n \to B$ и непрерывное отображение $F_0 : [0,1]^{n-1} \to E$, для которого $p(F_0(t_1, \dots, t_{n-1})) = f(t_1, \dots, t_{n-1}, 0)$ при всех $(t_1, \dots, t_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}$. Тогда существует и единственно непрерывное отображение $F : [0,1]^n \to E$ такое, что $F(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = F_0(t_1, \dots, t_{n-1})$ и $p(F(t_1, \dots, t_n)) = f(t_1, \dots, t_n)$ при всех $(t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n$.*

В частности, при $n = 1$ теорема выглядит так: куб $[0,1]^{n-1}$ — точка, а отображение F_0 : точка $\to E$ определяется своим образом — точкой E.

Теорема 1 для $n = 1$. *Пусть $f : [0,1] \to B$ — непрерывная кривая, и $e (= F_0(\text{точка})) \in p^{-1}(f(0))$. Тогда существует и единственна кривая $F : [0,1] \to E$ такая, что $F(0) = e$ и $p(F(t)) = f(t)$ при всех $t \in [0,1]$.*

Кривая F называется поднятием кривой f.

Теорема 1 ранее уже доказывалась для накрытия из примера 2 (см. лекцию 1). В общем случае доказательство практически такое же:

Доказательство теоремы 1. Обозначим $S \subset [0,1]^n$ множество таких $s = (s_1, \dots, s_n) \in [0,1]^n$, что искомое непрерывное поднятие F существует и единственно на параллелепипеде $\Pi_s \overset{\text{def}}{=} [0, s_1] \times \dots \times [0, s_n]$ и на любом параллелепипеде $\Pi_u \subset \Pi_s$ (т.е. таком, что $u = (u_1, \dots, u_n)$, $0 \le u_i \le s_i$ для всех i). Множество S непусто, поскольку $[0,1]^{n-1} \times \{0\} \subset S$.

Докажем, что множество S открыто: если $s \in S$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(s) \cap [0,1]^n \subset S$. Действительно, пусть $U \ni f(s)$ — тривиализующая окрестность, и $\varepsilon > 0$ таково, что $f(B_\varepsilon(s)) \subset U$ (ε существует, так как f непрерывно). Пусть $\lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$ — тривиализация, а $p_1, p_2 : U \times F \to U, F$ — проекции на первый и второй сомножитель соответственно. Тогда $\mu \overset{\text{def}}{=} p_2 \circ \lambda \circ F : \Pi_s \to F$ — непрерывное отображение. Поскольку Π_s связен, а F дискретно, отображение μ — константа: $\mu(t) = q$ для некоторого $q \in F$ и произвольного $t \in \Pi_s$. Тогда для произвольного $s' \in B_\varepsilon(s)$ можно продолжить F на $\Pi_{s'}$ по формуле $F(t) = \lambda^{-1}(f(t), q)$, где $t \in \Pi_{s'}$. Других продолжений нет: по условию должно быть $p(F(t)) = p_1(\lambda(F(t)) = f(t)$, и $p_2(\lambda(F(t))) = q$ для всех $t \in \Pi_{s'}$ опять же в силу связности.

Докажем, что S замкнуто: пусть $s = \lim_{m\to\infty} s^{(m)}$, где $s^{(m)} \in S$. Как и выше, пусть $U \ni f(s)$ — тривиализующая окрестность, и пусть $F_m : \Pi_{s^{(m)}} \to E$ — поднятие. Без ограничения общности $f(s^{(m)}) \in U$ для всех m. Для произвольных $s = (s_1, \dots, s_n)$ и $t = (t_1, \dots, t_n)$ положим $\min(s, t) \overset{\text{def}}{=} (\min(s_1, t_1), \dots, \min(s_n, t_n))$; тогда $\Pi_{\min(s,t)} = \Pi_s \cap \Pi_t$. Без ограничения общности $f(\min(s^{(p)}, s^{(q)})) \in U$ при всех $p, q = 1, 2, \dots$. Тем самым на параллелепипеде $\Pi_* \overset{\text{def}}{=} \Pi_{\min(s^{(p)}, s^{(q)})} = \Pi_{s^{(p)}} \cap \Pi_s^{(q)}$ определены два поднятия — $F_p|_{\Pi_*}$ и $F_q|_{\Pi_*}$. Поскольку $\Pi_* \subset \Pi_{s^{(p)}}$, поднятие единственно; тем самым два поднятия совпадают, откуда вытекает, что поднятие F определено и непрерывно на объединении $S_0 \overset{\text{def}}{=} \bigcup_m \Pi_{s^{(m)}}$. Все точки Π_s являются предельными для S_0. Поскольку S_0 связно (почему?), а F дискретно, $p_2(\lambda(F(t)) = q = const.$ при всех $t \in S_0$. Тогда можно положить $F(s) = \lambda^{-1}(f(s), q)$, и аналогично для произвольной точки $t \in \Pi_s$. Тем самым определено непрерывное поднятие $F : \Pi_s \to E$. Единственность его очевидна (из единственности предела); поэтому $s \in S$, и S замкнуто.

Множество $S \subset [0,1]^n$ открыто, замкнуто и непусто; куб $[0,1]^n$ связен, откуда $S = [0,1]^n$ и теорема доказана. □

Предположим, что тотальное пространство E и база B линейно связны; $e \in E$ — отмеченная точка, $b = p(e) \in B$. Тогда $p : E \to B$ определяет гомоморфизм $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$.

Следствие 1. *p_* — мономорфизм.*

Доказательство. Нужно доказать, что $\operatorname{Ker} p_*$ тривиально, т.е. если $p_*(x) = 1 \in \pi_1(B, b)$, то $x = 1 \in \pi_1(E, e)$. Пусть $\gamma : [0,1] \to E$ — кривая, представляющая класс x, $\gamma(0) = \gamma(1) = e$. Тогда по условию петля $p \circ \gamma : [0,1] \to B$ стягиваема, т.е. существует непрерывное отображение (гомотопия) $f : [0,1]^2 \to B$, что $f(t, 0) = p(\gamma(t))$, $f(t, 1) = b$ для всех t, и $f(0, s) = f(1, s) = b$ для всех s (поскольку это стягивание петель). Согласно теореме 1 существует непрерывное отображение $F : [0,1]^2 \to E$, для которого $p(F(t, s)) = f(t, s)$ для всех t, s и $F(t, 0) = \gamma(t)$ для всех t. В частности, $p(F(0, s)) = f(0, s) = b = f(1, s) = p(F(1, s))$ для всех s. Поскольку множество $p^{-1}(b) \subset E$ дискретно, а $s \in [0,1]$ — связное, получаем $F(0, s) = const. = F(0, 0) = \gamma(0) = e$, и то же самое для $F(1, s)$. Тем самым F — стягивание петли γ, которая тем самым представляет класс $x = 1 \in \pi_1(E, e)$. □

Тем самым каждому линейно связному накрытию с линейно связной базой B сопоставляется подгруппа $p_*(\pi_1(E, e)) \subset \pi_1(B, b)$, изоморфная $\pi_1(E, e)$.

Сечением отображения $p : E \to B$ называется правое обратное к p, т.е. такое отображение $s : B \to E$, что $p \circ s = \mathrm{id}_B$.

Следствие 2. *Накрытие $p : E \to B$, в котором пространства B и E линейно связны, а слой F содержит больше одной точки, не имеет непрерывных сечений.*

Доказательство. Пусть $s : B \to E$ — непрерывное сечение; зафиксируем точку $b \in B$ и пусть $e \stackrel{\text{def}}{=} s(b)$. Поскольку слой накрытия содержит больше одной точки, существует точка $u \neq e$ такая, что $p(u) = b = p(e)$.

Пусть $\delta : [0,1] \to E$ — непрерывная кривая, для которой $\delta(0) = e$, $\delta(1) = u$ (такая кривая существует, поскольку E линейно связно), и пусть $\gamma = p \circ \delta$; тогда γ — петля. Поднятием γ является, в силу единственности, незамкнутая кривая γ, откуда вытекает, что класс гомотопии $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ не лежит в образе мономорфизма $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$; тем самым p_* не является эпи- (а, следовательно, и изо-) морфизмом.

С другой стороны, $p_* \circ s_* = (p \circ s)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(B,b)}$. Тогда для произвольного $x \in \pi_1(B, b)$ имеем $p_*(s_*(x)) = x$, то есть $p_*(\pi_1(E, e)) = \pi_1(B, b)$, то есть p_* — эпиморфизм. Противоречие. □

Следствие 3 (следствия 2)**.** *Ни для какого натурального $n > 1$ не существует непрерывного комплексного корня n-ой степени, т.е. непрерывной функции $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для которой $w^n(z) \equiv z$.*

Доказательство. Если w существует, то, очевидно, $w(0) = 0$ и $w(z) \neq 0$ при $z \neq 0$. Тем самым ограничение w на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ является непрерывным отображением $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и, следовательно, непрерывным сечением отображения $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, заданного формулой $p(z) = z^n$. Поскольку p — n-листное накрытие (согласно примеру 5), оно не имеет непрерывных сечений. □

Аналогично доказывается, что не существует непрерывного комплексного логарифма.