6.1. **(a)** Докажите, что полуторалинейная форма f на векторном пространстве H эрмитова (т.е. $f(x,y)=\overline{f(y,x)}$ для всех $x,y\in H$) тогда и только тогда, когда $f(x,x)\in\mathbb{R}$ для всех $x\in H$. *Указание:* воспользуйтесь *тождеством поляризации*

$$f(x,y)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k f(x+i^k y, x+i^k y).$$

(b) Докажите, что ограниченный линейный оператор T в гильбертовом пространстве H самосопряжен тогда и только тогда, когда $\langle Tx\,|\,x\rangle\in\mathbb{R}$ для всех $x\in H$.

6.2. Докажите, что каждый непустой компакт $K\subset\mathbb{R}$ (соответственно, $K\subset\mathbb{T}$) является спектром некоторого самосопряженного (соответственно, унитарного) оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.

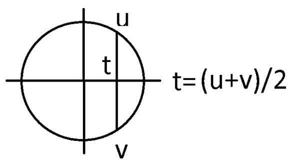
6.3-B. Что можно сказать про спектр изометрии в гильбертовом пространстве?

6.4. Пусть H — гильбертово пространство, $T\in\mathscr{B}(H)$. Докажите, что **(a)** $\operatorname{Ker} T=\operatorname{Ker} T^*T$; **(b)** если T нормален, то $\operatorname{Ker} T^*=\operatorname{Ker} T$; **(c)** остаточный спектр нормального оператора пуст.

6.5. Пусть T — любой из следующих операторов:
(a) ортогональный проектор в гильбертовом пространстве;
(b) диагональный оператор M_λ в пространстве ℓ^2 (где $\lambda\in\ell^\infty,\ \lambda_n\in\mathbb{R}\ \forall n$);
(c) оператор умножения M_φ в пространстве $L^2(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой и $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ — ограниченная измеримая функция).
Для произвольной непрерывной функции $f\colon\sigma(T)\to\mathbb{C}$ задайте оператор $f(T)$ явной формулой.

6.6. Пусть H — гильбертово пространство, $K\subset\mathbb{R}$ — компакт. Обозначим через S_K множество всех самосопряженных операторов T в H, для которых $\sigma(T)\subset K$. Докажите, что отображение $C(K)\times S_K\to\mathscr{B}(H)$, $(f,T)\mapsto f(T)$, непрерывно.

6.7. Докажите, что каждый ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве является линейной комбинацией четырех унитарных операторов.
Подсказка: см. рис.



6.8. **(a)-(c)** Для каждого оператора T из задачи 6.5 и произвольной ограниченной борелевской функции $f\colon\sigma(T)\to\mathbb{C}$ задайте оператор $f(T)$ явной формулой.

6.9. Верны ли для борелевского исчисления теоремы **(a)** об отображении спектра и **(b)** о композиции?

6.10-B. Сформулируйте и докажите теоремы о непрерывном и борелевском исчислениях для унитарного оператора. (*Указание:* видоизмените доказательство теоремы о непрерывном исчислении для самосопряженного оператора, используя лорановские многочлены на окружности вместо многочленов на прямой.)

6.11-B. Докажите, что ограниченный линейный оператор U в гильбертовом пространстве унитарен **(a)** тогда и **(b)** только тогда, когда он имеет вид $U=\exp(iT)$ для некоторого самосопряженного оператора T.

6.12-B. Докажите, что группа $\mathrm{U}(H)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве H линейно связна.

Определение 6.1. Пусть H — гильбертово пространство. Оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ называется *положительным* (в этом случае пишут $T \geqslant 0$), если он самосопряжен и $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$.

6.13 (*квадратный корень*)**.** Пусть H — гильбертово пространство и T — положительный оператор в H. Докажите, что существует единственный положительный оператор S в H такой, что $S^2 = T$. Этот оператор называется *квадратным корнем* из T и обозначается $\sqrt{T}$ или $T^{1/2}$.

6.14. Докажите, что следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны:
(1) $T \geqslant 0$;
(2) $T = S^2$ для некоторого положительного $S \in \mathscr{B}(H)$;
(3) $T = S^2$ для некоторого самосопряженного $S \in \mathscr{B}(H)$;
(4) $T = S^*S$ для некоторого $S \in \mathscr{B}(H)$;
(5) $\langle Tx \,|\, x\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in H$.
Указание. Чтобы вывести (1) из (5), докажите, что $T + \lambda \mathbf{1}$ топологически инъективен при $\lambda > 0$.

6.15-B. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $U \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$.
(a) Докажите, что следующие свойства оператора U эквивалентны:
(1) ограничение U на $(\operatorname{Ker} U)^\perp$ — изометрия;
(2) U^*U — проектор;
(3) $UU^*U = U$.
Оператор U с такими свойствами называется *частичной изометрией.*
(b) Докажите, что если U — частичная изометрия, то и U^* — частичная изометрия, и что образами проекторов U^*U и UU^* являются подпространства $(\operatorname{Ker} U)^\perp$ и $\operatorname{Im} U$ соответственно. (Эти проекторы называются, соответственно, *начальным* и *конечным* проекторами частичной изометрии U.)

6.16-B (*полярное разложение*)**.** Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$. Положим $|T| = (T^*T)^{1/2}$.
(a) Докажите, что существует единственная частичная изометрия $U \colon H_1 \to H_2$, удовлетворяющая условиям $T = U|T|$ и $\operatorname{Ker} U = (\operatorname{Im} |T|)^\perp$.
(b) Пусть $T = VS$, где $V \colon H_1 \to H_2$ — частичная изометрия, $S \in \mathscr{B}(H_2)$ положителен и $\operatorname{Ker} V = (\operatorname{Im} S)^\perp$. Докажите, что $S = |T|$ и $V = U$.

6.17-B. Найдите полярные разложения следующих операторов:
(a) ортогональный проектор в гильбертовом пространстве;
(b) диагональный оператор M_λ в ℓ^2 (где $\lambda \in \ell^\infty$);
(c) оператор умножения M_φ в $L^2(X, \mu)$ (где (X, μ) — пространство с мерой, $\varphi \colon X \to \mathbb{C}$ — ограниченная измеримая функция);
(d) оператор сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$;
(e) оператор правого сдвига в ℓ^2;
(f) оператор левого сдвига в ℓ^2.

6.18-B. Верно ли, что любой ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве H можно представить в виде $T = US$, где S — положительный, а U — унитарный оператор в H?

6.19-B. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $Y \subset X$ называется *деформационным ретрактом* X, если существует такое непрерывное отображение $p \colon X \to Y$, что $pi = \mathbf{1}_Y$ (где $i \colon Y \hookrightarrow X$ — вложение), а ip гомотопно $\mathbf{1}_X$. Докажите, что группа унитарных операторов $\mathrm{U}(H)$ в гильбертовом пространстве H является деформационным ретрактом группы $\mathrm{GL}(H)$ обратимых операторов в H. Выведите отсюда, что $\mathrm{GL}(H)$ линейно связна.