5.1. Пусть X, Y — топологические векторные пространства. Докажите, что
(a) линейный оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен $\iff$ он непрерывен в нуле;
(b) множество $\mathscr{L}(X,Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y — векторное подпространство в пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X,Y)$ всех линейных операторов из X в Y.

5.2. Для полунормы p на векторном пространстве X положим $U_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$ и $\overline{U}_p = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$. Докажите, что
(a) функционалы Минковского множеств U_p и $\overline{U}_p$ совпадают с p;
(a) $U_p \subset U_q \iff \overline{U}_p \subset \overline{U}_q \iff U_p \subset \overline{U}_q \iff q \leqslant p$.

5.3. На каких из следующих топологических векторных пространств существует хотя бы одна непрерывная норма?
(a) $\mathbb{K}^X$ (где X — множество);
(b) $C(X)$ (где X — тихоновское[1] топологическое пространство);
(c) пространство голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, снабженное компактно-открытой топологией;
(d) $C^\infty[a,b]$; **(e)** $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
(f) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; **(g)** $\mathscr{D}(U) = C_c^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

5.4. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P, нормируемо тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему конечному подсемейству.

5.5. (a)-(f) Какие пространства из задачи 5.3 нормируемы?

5.6. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P, метризуемо тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему не более чем счетному подсемейству.

Указание. Если $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность полунорм, то функция

$$\rho(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

удовлетворяет неравенству треугольника.

5.7. (a)-(f) Какие пространства из задачи 5.3 метризуемы?

5.8-B. Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые два семейства полунорм, каждое из которых задает хаусдорфову топологию, эквивалентны.

5.9. Пусть X — множество. Докажите, что для любой функции $f \in \mathbb{K}^X$ оператор умножения $M_f\colon \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X,\ M_f(g) = fg$, непрерывен.

5.10. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Докажите, что любой линейный дифференциальный оператор $\sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha D^\alpha$ в пространстве $C^\infty(U)$ (где $a_\alpha \in C^\infty(U)$) непрерывен.

5.11. Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ и $p \in [1, +\infty)$. Для $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ порождается любым из следующих эквивалентных семейств полунорм:

[1] Хаусдорфово топологическое пространство X называется *тихоновским*, если для каждого замкнутого множества $F \subset X$ и каждого $x \in X \setminus F$ найдется такая непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, что $f|_F = 0$ и $f(x) = 1$. Тихоновскими являются все метризуемые пространства (докажите!), все хаусдорфовы компакты и, более общим образом, все *нормальные* пространства (см. любой учебник по общей топологии).

(a) $\{\|\cdot\|_{r,p} : 0 < r < R\}$, где $\|f\|_{r,p} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(|c_n(f)|r^n)^p\Big)^{1/p}$.
(b) $\{\|\cdot\|_{r,\infty} : 0 < r < R\}$, где $\|f\|_{r,\infty} = \sup_{n\geqslant 0}|c_n(f)|r^n$.
(c)-B $\{\|\cdot\|^I_{r,p} : 0 < r < R\}$, где $\|f\|^I_{r,p} = \Big(\int_{|z|=r}|f(z)|^p\, d\mu(z)\Big)^{1/p}$ и μ — мера длины на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

5.12-B. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.

5.13-B. Пространство *быстро убывающих последовательностей* $s(\mathbb{Z})$ определяется так:

$$s(\mathbb{Z}) = \Big\{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \|x\|_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n||n|^k < \infty \ \forall k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Big\}.$$

Топология на $s(\mathbb{Z})$ порождается последовательностью полунорм $\{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{T}) \cong s(\mathbb{Z})$. (*Указание:* сопоставьте каждой функции из $C^\infty(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье.)

5.14. Пусть e_n — числовая последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных. Исследуйте последовательность (e_n) на слабую сходимость в пространствах c_0 и ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$.

5.15. Докажите, что последовательность непрерывных функций на отрезке слабо сходится тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена и сходится поточечно.

5.16. Пусть T_ℓ и T_r — операторы левого и правого сдвига в ℓ^2. Исследуйте последовательности $(T_\ell^n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(T_r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ на сходимость
(a) по норме в $\mathscr{B}(\ell^2)$;
(b) в сильной операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$;
(c) в слабой операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$.

5.17. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара векторных пространств. Докажите, что
(a) $\dim X < \infty \iff \dim Y < \infty \iff$ слабая топология $\sigma(X,Y)$ нормируема;
(b) слабая топология $\sigma(X,Y)$ метризуема $\iff$ размерность Y не более чем счетна;
(c) слабая топология на бесконечномерном нормированном пространстве и слабая* топология на пространстве, сопряженном к бесконечномерному банахову пространству, неметризуемы.

5.18. Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathbb{K}^X$ (где X — множество) и докажите, что слабая топология на пространстве $\mathbb{K}^X$ совпадает с исходной.

5.19. Пусть X и Y — нормированные пространства. Обозначим через SOT, WOT и NT соответственно сильную операторную топологию, слабую операторную топологию и топологию, задаваемую операторной нормой на $\mathscr{B}(X,Y)$.
(a) Докажите, что WOT $\subseteq$ SOT $\subseteq$ NT.
(b) Докажите, что если Y бесконечномерно, то WOT $\neq$ SOT.
(c) Докажите, что если X бесконечномерно, то SOT $\neq$ NT.

5.20. Приведите пример разрывного линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП X и Y, который непрерывен относительно слабых топологий на X и Y.

5.21. **(a)** Приведите пример банахова пространства X и векторного подпространства $Y \subset X^*$, которое замкнуто по норме, но не замкнуто в слабой* топологии.
(b) Докажите, что если X нерефлексивно, то такое Y, как в п. (a), обязательно существует.

5.22-B. Докажите, что в пространстве ℓ^1 всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.