

4.1. Докажите, что для линейного оператора $T: X \rightarrow Y$ между конечномерными векторными пространствами X и Y справедливо равенство $\text{ind } T = \dim X - \dim Y$.

4.2 (этот результат использовался на лекции при доказательстве аддитивности индекса). Пусть $0 \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots \rightarrow X^n \rightarrow 0$ — точная последовательность конечномерных векторных пространств. Докажите, что $\sum_i (-1)^i \dim X^i = 0$.

4.3. Что можно сказать об операторе, который компактен и фредгольмов одновременно?

4.4. Пусть $a_0, \dots, a_n \in C^p[a, b]$. Докажите, что оператор

$$D: C^{p+n}[a, b] \rightarrow C^p[a, b], \quad D(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y$$

фредгольмов, и вычислите его индекс.

4.5. Докажите, что оператор $D: C^1(S^1) \rightarrow C(S^1)$, $D(f) = f'$ фредгольмов, и вычислите его индекс.

4.6. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть M_λ — соответствующий диагональный оператор в ℓ^p или в c_0 . Найдите условие на λ , необходимое и достаточное для фредгольмовости M_λ . Вычислите его индекс.

4.7. Пусть $f \in C[a, b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a, b]$. Найдите условие на f , необходимое и достаточное для фредгольмовости M_f . Вычислите его индекс.

4.8. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Найдите условие на f , необходимое и достаточное для фредгольмовости M_f . Вычислите его индекс.

4.9. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ в H существует фредгольмов оператор индекса n .

4.10. Для каждого из следующих операторов T найдите $\sigma_{\text{ess}}(T)$ и вычислите $\text{ind}(T - \lambda \mathbf{1})$ для всевозможных $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(T)$: (a) диагональный оператор в ℓ^p или в c_0 ; (b) оператор умножения на непрерывную функцию в $C[a, b]$ или на ограниченную измеримую функцию в $L^p[a, b]$; (c) оператор левого сдвига в ℓ^p или в c_0 ; (d) оператор правого сдвига в ℓ^p или в c_0 ; (e) оператор двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$; (f) произвольный компактный оператор.

4.11 (классические теоремы Фредгольма). Пусть $I = [a, b]$. Введем билинейную форму на $C(I)$ формулой $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg \, dt$. Для каждой функции $K \in C(I \times I)$ определим функцию $K' \in C(I \times I)$ формулой $K'(x, y) = K(y, x)$. Пусть $T_K: C(I) \rightarrow C(I)$ — интегральный оператор, действующий по формуле

$$(T_K f)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) \, dy.$$

Положим $S_K = \mathbf{1} - T_K$. Докажите следующие утверждения:

(a) $f \in \text{Im } S_K \iff \langle f, g \rangle = 0 \quad \forall g \in \text{Ker } S_{K'}$.

(b) $\dim \text{Ker } S_K = \dim \text{Ker } S_{K'} < \infty$.

Указание. Продолжите операторы S_K и $S_{K'}$ на $L^2(I)$ и воспользуйтесь теоремами Фредгольма в формулировке Шаудера (см. лекцию).

4.12 (еще одно доказательство аддитивности индекса). Пусть X, Y, Z — банаховы пространства и $T: X \rightarrow Y, S: Y \rightarrow Z$ — фредгольмовы операторы. Рассмотрите оператор

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_Y & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_Y \cos t & -\mathbf{1}_Y \sin t \\ \mathbf{1}_Y \sin t & \mathbf{1}_Y \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_Y \end{pmatrix},$$

действующий из $X \oplus Y$ в $Y \oplus Z$, и, пользуясь непрерывностью индекса, получите еще одно доказательство формулы $\text{ind}(ST) = \text{ind } S + \text{ind } T$.

4.13-В (и еще одно доказательство аддитивности индекса; Д. Сарасон, 1987). Пусть X, Y, Z — векторные пространства, $T: X \rightarrow Y$ и $S: Y \rightarrow Z$ — фредгольмовы операторы. Постройте разложения $X = X_0 \oplus X_1, Y = Y_0 \oplus Y_1$ и $Z = Z_0 \oplus Z_1$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) X_0, Y_0 и Z_0 конечномерны;
- 2) $T(X_i) \subseteq Y_i$ и $S(Y_i) \subseteq Z_i$ ($i = 0, 1$);
- 3) T — изоморфизм X_1 на Y_1 , а S — изоморфизм Y_1 на Z_1 .

Из существования таких разложений выведите, что формулу $\text{ind}(ST) = \text{ind } S + \text{ind } T$ достаточно доказать для операторов между конечномерными пространствами. Докажите эту формулу. (Подсказка: $X_0 = T^{-1}(\text{Ker } S)$.)

4.14. (а) Пусть H — гильбертово пространство. Примем пока на веру утверждение о том, что группа $\text{GL}(H)$ обратимых ограниченных операторов в H линейно связна¹ (через некоторое время мы сможем ее доказать). Докажите, что фредгольмовы операторы $S, T \in \mathcal{B}(H)$ лежат в одной связной компоненте множества $\text{Fred}(H) \iff$ их можно соединить непрерывным путем в $\text{Fred}(H) \iff \text{ind } S = \text{ind } T$.

(б) Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство и $\mathcal{Q}(H) = \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ — алгебра Калкина. Обозначим через G группу обратимых элементов в $\mathcal{Q}(H)$, а через $G_0 \subset G$ связную компоненту единицы. Докажите, что фредгольмов индекс индуцирует изоморфизм групп $G/G_0 \cong \mathbb{Z}$.

4.15-В. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, и пусть T_f — соответствующий оператор Тёплица в пространстве Харди $H^2(\mathbb{T})$. Напомним (см. лекцию), что если f не обращается в нуль, то T_f фредгольмов.

(а) Предположим, что $f(z) = 0$ для некоторого $z \in \mathbb{T}$. Докажите, что T_f не фредгольмов.

(б) Найдите $\sigma_{\text{ess}}(T_f)$ в терминах f .

(с) Найдите $\|T_f\|$ в терминах f .

¹На самом деле можно сказать больше: если H бесконечномерно, то группа $\text{GL}(H)$ стягиваема, т.е. гомотопически эквивалентна точке (теорема Кюйпера). См. добавление к книге М. Атья «Лекции по K -теории», М.: Мир, 1967.