2.1. Пусть X и Y — банаховы пространства и $S \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$. Обязательно ли существует такой оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, что $S = T^*$?

2.2. Отождествим $(\ell^1)^*$ с ℓ^∞ (см. задачу ФА1-3.7) и рассмотрим пространство c_0 как подмножество в $(\ell^1)^*$. Найдите ${}^\perp c_0$ и $({}^\perp c_0)^\perp$. (*Мораль:* если X — нерефлексивное банахово пространство, то для замкнутого подпространства $N \subset X^*$ равенство $N = ({}^\perp N)^\perp$ может нарушаться.)

2.3. Пусть X — нерефлексивное банахово пространство. Покажите, что в X^* существует замкнутое векторное подпространство N, для которого $N \neq ({}^\perp N)^\perp$.

2.4. Придумайте пример инъективного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ между банаховыми пространствами X и Y, такого, что $\operatorname{Im} T^*$ не плотен в X^*. (*Указание:* X обязано быть нерефлексивным — см. лекцию. *Мораль:* для нерефлексивных пространств равенство $\overline{\operatorname{Im}(T^*)} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ может не выполняться.)

2.5. Пусть X и Y — нормированные пространства, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$

(a) Верно ли, что если T^* топологически инъективен, то T сюръективен? (Для банаховых пространств ответ положителен — см. лекцию.)

(b)-B Придумайте условие на T, необходимое и достаточное для того, чтобы T^* был топологически инъективным.

2.6. (a) Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что множество сюръективных ограниченных линейных операторов из X на Y открыто в $\mathscr{B}(X, Y)$.

(b) Сохраняет ли силу п. (a) для неполных нормированных пространств?

2.7 (*лемма Джонсона*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(1) последовательность $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ точна и $\operatorname{Im} T$ замкнут;

(2) последовательность $Z^* \xrightarrow{T^*} Y^* \xrightarrow{S^*} X^*$ точна и $\operatorname{Im} S^*$ замкнут.

Как следствие, цепной комплекс банаховых пространств точен тогда и только тогда, когда точен его сопряженный комплекс.

2.8. Уберем из пп. (1) и (2) предыдущей задачи требования замкнутости образов. Сохраняет ли силу какая-либо из импликаций (1) $\Longrightarrow$ (2) и (2) $\Longrightarrow$ (1)?

2.9 (*лемма Серра*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Предположим, что операторы S и T имеют замкнутые образы. Постройте изометрический изоморфизм $(\operatorname{Ker} T / \operatorname{Im} S)^* \cong \operatorname{Ker} S^* / \operatorname{Im} T^*$.

Как следствие, если C — цепной комплекс банаховых пространств, в котором все отображения $C_{n+1} \to C_n$ имеют замкнутые образы, то $H^n(C^*) \cong H_n(C)^*$.

2.10. Пусть X — банахово пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Докажите, что X рефлексивно тогда и только тогда, когда X_0 и X/X_0 рефлексивны.