1.1. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Докажите, что

(a) факторполунорма на X/X_0 действительно является полунормой;

(b) топология на X/X_0, порожденная факторполунормой, является фактортопологией топологии на X (т.е. множество $U \subset X/X_0$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз при факторотображении $Q\colon X \to X/X_0$ открыт в X).

Определение 1.1. Пусть X — нормированное пространство. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ векторов из X *абсолютно сходится*, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

1.2. Докажите, что нормированное пространство полно тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится. (Этот факт был использован на лекции при доказательстве полноты факторпространств.)

1.3. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $B(X)$ — пространство ограниченных измеримых функций на X, снабженное sup-нормой. Постройте изометрический изоморфизм между пространством $L^\infty(X, \mu)$ и некоторым факторпространством пространства $B(X)$. (Отсюда в качестве следствия мы снова получаем утверждение о полноте $L^\infty(X, \mu)$ — см. задачу ФА1-3.6.)

1.4. (a) Докажите, что любое банахово пространство X изометрически изоморфно факторпространству пространства $\ell^1(S)$ для некоторого множества S.

(b)-B Докажите, что сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно факторпространству пространства ℓ^1.

1.5. (a) Докажите, что любое нормированное пространство X изометрически изоморфно подпространству в $\ell^\infty(S)$ для некоторого множества S.

(b) Докажите, что сепарабельное нормированное пространство изометрически изоморфно подпространству в ℓ^∞.

1.6. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство, $Q\colon X \to X/X_0$ — факторотображение.

(a) Докажите, что X_0 дополняемо в X (см. определение ФА1-5.1) тогда и только тогда, когда существует такой ограниченный линейный оператор $S\colon X/X_0 \to X$, что $QS = \mathbf{1}_{X/X_0}$.

(b) Докажите, что если X_0 имеет конечную коразмерность в X, то оно дополняемо.

1.7. Опишите банахово сопряженные (двойственные) к следующим операторам:

(a) диагональный оператор в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0 (см. задачу ФА1-2.1);

(b) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^p(X, \mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$ (см. задачу ФА1-2.4);

(c) операторы левого и правого сдвига в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0;

(d) оператор сдвига в $\ell^p(\mathbb{Z})$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или в $c_0(\mathbb{Z})$;

(e) оператор «первообразной» в $L^p[0, 1]$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. задачу ФА1-2.5);

(f) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X, \mu)$ (см. задачу ФА1-2.7).

Обратите внимание на отличие между «банаховой» и «гильбертовой» сопряженностью для случая $p = 2$ (см. задачу ФА1-8.5).

1.8. Пусть X — нормированное пространство, $i_X\colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Докажите, что для любого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "i_Y"'] \end{tikzcd}$$

1.9. Докажите, что композиция канонического вложения $c_0 \to (c_0)^{**}$ и стандартного изоморфизма $(c_0)^{**} \cong \ell^\infty$ — это тождественное вложение c_0 в ℓ^∞. Как следствие, c_0 нерефлексивно.

1.10. Докажите, что
(a) пространство $L^p(X,\mu)$ рефлексивно при $1 < p < +\infty$;
(b) гильбертово пространство рефлексивно;
(c) пространство $L^1[a,b]$ нерефлексивно;
(d) пространство $C[a,b]$ нерефлексивно;
(e)-B пространство $L^1(X,\mu)$ нерефлексивно (за исключением случая, когда оно конечномерно).

1.11. Пусть X — нормированное пространство, $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Исследуйте взаимосвязь между операторами $i_{X^*} \colon X^* \to X^{***}$ и $i_X^* \colon X^{***} \to X^*$.

1.12. (a) Докажите, что банахово пространство X рефлексивно $\iff$ X^* рефлексивно.
(b) Выведите отсюда нерефлексивность пространств ℓ^1, ℓ^∞, $L^\infty[a,b]$.

1.13. Для рефлексивных пространств выведите теорему Банаха об обратном операторе из теоремы Банаха–Штейнгауза.

Указание. Чтобы доказать, что биективный оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ является топологическим изоморфизмом, достаточно проверить ограниченность прообраза единичного шара при отображении T^*.