

## 1. Двойственность для банаховых пространств

1. Топологически инъективные операторы, открытые операторы, изометрии, коизометрии. Критерии топологической инъективности и открытости оператора.
2. Факторпространства нормированных пространств. Универсальное свойство факторпространств и его следствия. Полнота факторпространств. Теорема Банаха об открытом отображении (сведение к теореме об обратном операторе).
3. Сопряженное (двойственное) пространство, сопряженный (двойственный) оператор. Примеры. Каноническое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Рефлексивность. Примеры рефлексивных и нерефлексивных банаховых пространств.
4. Аннуляторы, преданнуляторы и их свойства. Совпадение преданнулятора аннулятора подмножества с замыканием его линейной оболочки. Описание сопряженных к подпространствам и к факторпространствам.
5. Двойственность между инъективными операторами и операторами с плотным образом. Двойственность между топологически инъективными и сюръективными операторами. Теорема о замкнутом образе (эквивалентность замкнутости образа оператора и образа его сопряженного). Лемма Джонсона о точных последовательностях банаховых пространств.

## 2. Элементарная спектральная теория

6. Спектр элемента алгебры. Спектры элементов алгебр  $\mathbb{C}^X$ ,  $\ell^\infty(X)$ ,  $L^\infty(X, \mu)$ . Поведение спектра при гомоморфизмах. Спектрально инвариантные подалгебры.
7. Теорема об отображении спектра для многочленов. Спектр обратного элемента.
8. Банаховы алгебры; примеры. Свойства группы обратимых элементов банаховой алгебры. Автоматическая непрерывность гомоморфизмов в  $\mathbb{C}$ . Компактность спектра элемента банаховой алгебры.
9. Резольвентная функция и ее свойства. Непустота спектра элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда–Мазура.
10. Спектральный радиус. Формула Бёрлинга–Гельфанда.
11. Описание спектра оператора умножения на функцию в  $L^p(X, \mu)$  и спектра оператора сдвига в  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .
12. Части спектра линейного оператора (точечный, непрерывный и остаточный спектры). Описание частей спектра диагонального оператора.

13. Спектр сопряженного оператора. Включения между частями спектра оператора и частями спектра его сопряженного. Описание частей спектра для операторов левого и правого сдвига в  $\ell^p$  (рефлексивный случай).

### 3. Фредгольмовы операторы

14. Фредгольмовы операторы. Простейшие примеры. Замкнутость образа фредгольмова оператора (лемма Като).
15. Фредгольмов индекс. Фредгольмовость и индекс сопряженного оператора. Аддитивность индекса.
16. Теорема Шаудера о компактности сопряженного оператора.
17. Подъем и спуск линейного оператора; их свойства. Теорема Рисса об операторах вида “ $1 +$  компактный”. Альтернатива Фредгольма. Применение к интегральным уравнениям.
18. Свойства спектра компактного оператора.
19. Критерий фредгольмовости Никольского–Аткинсона. Алгебра Калкина. Существенный спектр, его компактность и непустота.
20. Открытость множества фредгольмовых операторов и локальная постоянность индекса.
21. Сохранение фредгольмовости и индекса при компактных возмущениях. Теорема Никольского о фредгольмовых операторах индекса 0.
22. Операторы Тёплица и геометрическая интерпретация их индекса.

### 4. Локально выпуклые пространства и слабые топологии

23. Топологические векторные пространства. Топология, порожденная семейством полунорм. Непрерывность алгебраических операций, описание сходящихся последовательностей, критерий хаусдорфовости такой топологии. Примеры (пространства непрерывных и гладких функций, пространство Шварца, сильная и слабая операторные топологии).
24. Выпуклые, закругленные, абсолютно выпуклые и поглощающие множества в векторных пространствах. Функционал Минковского и его свойства. Локально выпуклые пространства и их «полинормируемость».
25. Критерий непрерывности полунормы на локально выпуклом пространстве. Критерий непрерывности линейного оператора в терминах полунорм. Критерий мажорирования одного семейства полунорм другим. Наличие достаточного количества непрерывных линейных функционалов на хаусдорфовом локально выпуклом пространстве.

26. Проективные и индуктивные локально выпуклые топологии. Примеры: стандартные топологии на пространствах непрерывных и гладких функций с компактным носителем.
27. Описание сходящихся последовательностей в пространстве  $\mathcal{D}(U)$  гладких функций с компактным носителем. Эквивалентность непрерывности и секвенциальной непрерывности для линейных отображений из  $\mathcal{D}(U)$ .
28. Дуальные пары и слабые топологии. Описание линейных функционалов, непрерывных в слабой топологии. Критерий рефлексивности банахова пространства в терминах топологий на его сопряженном.
29. Сопряженные операторы между пространствами дуальных пар. Критерий существования сопряженного оператора. Эквивалентность непрерывности и слабой непрерывности оператора между нормированными пространствами.
30. Аннуляторы подмножеств в дуальных парах, их свойства. Теорема о двойном аннуляторе и ее следствия.
31. Равностепенная непрерывность. Теорема Банаха–Алаоглу–Бурбаки.

## 5. Спектральная теория самосопряженных операторов

32. Оператор, сопряженный к оператору между гильбертовыми пространствами. Основные свойства операции перехода к сопряженному оператору.  $C^*$ -тождество. Связь свойств оператора между гильбертовыми пространствами со свойствами его сопряженного.
33. Вещественность спектра самосопряженного оператора. Совпадение нормы нормального оператора с его спектральным радиусом. Инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству самосопряженного оператора.
34.  $*$ -алгебры, банаховы  $*$ -алгебры,  $C^*$ -алгебры. Примеры. Непрерывность  $*$ -представлений банаховых  $*$ -алгебр. Непрерывное исчисление от самосопряженного оператора (существование, единственность, изометричность). Примеры.
35. Теоремы об отображении спектра и о композиции для непрерывного исчисления.
36. Слабо-мерная топология на алгебре ограниченных борелевских функций и слабая операторная топология на  $\mathcal{B}(H)$ . Раздельная непрерывность умножения в этих топологиях.
37. Связь между операторами в гильбертовом пространстве и полуторалинейными формами.
38. Продолжение  $*$ -представлений алгебры  $C(X)$  на алгебру  $B(X)$  ограниченных борелевских функций. Борелевское исчисление от самосопряженного оператора.
39.  $*$ -модули над банаховыми  $*$ -алгебрами. Циклические  $*$ -модули. Примеры. Теорема о функциональной модели циклического  $C(X)$ - $*$ -модуля. Следствие: теорема о функциональной модели самосопряженного циклического оператора.

40. Гильбертовы суммы  $*$ -модулей. Разложение  $*$ -модуля на циклические слагаемые. Теоремы о функциональной модели для  $C(X)$ - $*$ -модулей и (как следствие) для самосопряженных операторов.
41. Спектральные меры. Интеграл по спектральной мере. Регулярные спектральные меры. Спектральное разложение для  $*$ -представлений алгебры  $C(X)$  и (как следствие) для самосопряженных операторов.