9.1. Докажите, что **(a)** дельта-функция Дирака $\delta_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ не регулярна; **(b)** производная дельта-функции не задается никакой мерой Радона[1].

9.2. (a) Докажите, что формула

$$f(\varphi) = \Big(\mathscr{P}\frac{1}{x}\Big)(\varphi) = \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

задает обобщенную функцию f на $\mathbb{R}$.
(b) Докажите, что f не задается никакой мерой Радона на $\mathbb{R}$.

9.3 (*формулы Сохоцкого*)**.** Придайте смысл следующим формулам и докажите их:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta_0 + \mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

Пусть $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества. Продолжая каждую функцию из $\mathscr{D}(V)$ нулем на $U \setminus V$, мы можем считать $\mathscr{D}(V)$ подпространством в $\mathscr{D}(U)$. Говорят, что обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(U)$ является *продолжением* обобщенной функции $f_0 \in \mathscr{D}'(V)$, если $f_0(\varphi) = f(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(V)$. Например, $\mathscr{P}(1/x)$ (см. задачу 9.2) — продолжение на $\mathbb{R}$ регулярной обобщенной функции $1/x \in \mathscr{D}'(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

9.4. Для $n \in \mathbb{N}$ определим обобщенную функцию $f_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ формулой

$$f_n(\varphi) = \frac{-1}{(n-1)!}\int_{\mathbb{R}} \varphi^{(n)}(x)\,\ln|x|\,dx.$$

(a) Докажите, что f_n — обобщенная функция на $\mathbb{R}$, продолжающая регулярную обобщенную функцию $1/x^n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
(b) Как связаны f_1 и $\mathscr{P}(1/x)$?

9.5. Докажите, что регулярная обобщенная функция $e^{1/x}$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не продолжается до обобщенной функции на $\mathbb{R}$.

9.6. Докажите равенства: **(a)** $\varphi\delta_{x_0} = \varphi(x_0)\delta_{x_0}$ для всех $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (где $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$ — функция Дирака в точке x_0, заданная формулой $\delta_{x_0}(\psi) = \psi(x_0)$); **(b)** $x\mathscr{P}(1/x) = 1$ (где x — координата на $\mathbb{R}$).

9.7. Пусть $f \in \mathscr{D}'(U)$ и $\varphi \in \mathscr{D}(U)$.
(a) Пусть $\varphi f = 0$; верно ли, что $f(\varphi) = 0$?
(b) Пусть $f(\varphi) = 0$; верно ли, что $\varphi f = 0$?

9.8. Докажите, что на пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ не существует ассоциативной и коммутативной операции умножения, которая продолжала бы операцию умножения обобщенной функции на гладкую.

9.9. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Согласно задаче 9.6, $\varphi\delta_{x_0} = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x_0) = 0$. Какому условию на φ равносильно равенство $\varphi\delta'_{x_0} = 0$?

9.10. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — кусочно C^1-функция, $\{x_k\}$ — множество ее точек разрыва. Докажите, что $f' = f'_{\text{class}} + \sum_k a_k\delta_{x_k}$, где f' — обобщенная производная f, f'_{class} — почти всюду определенная классическая производная f, а a_k — скачок функции f в точке x_k.

[1] *Мера Радона* на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ — это σ-аддитивная (не обязательно положительная) конечная мера на классе всех относительно компактных борелевских подмножеств U. Каждая мера Радона μ на U порождает обобщенную функцию f_μ на U по формуле $f_\mu(\varphi) = \int \varphi\,d\mu$.

9.11. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — функция, имеющая ограниченную вариацию на каждом отрезке. Обозначим через μ_f соответствующую меру Лебега–Стилтьеса (она, очевидно, является мерой Радона на $\mathbb{R}$). Докажите, что $f' = \mu_f$ (где f' — обобщенная производная f).

Указание. Для $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ вычислите двумя способами интеграл функции $\psi(x,y) = \varphi(x)$ по множеству $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -C \leqslant x < y \leqslant C\}$ относительно меры $dx\, d\mu_f(y)$.

9.12. Приведите пример непрерывной, почти всюду дифференцируемой функции на $\mathbb{R}$, чья обычная производная локально интегрируема, но не совпадает с обобщенной производной.

9.13. Пусть $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — числовая последовательность *умеренного роста* (это означает, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $(c_n|n|^{-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничена). Докажите, что ряд $\sum_n c_n e^{inx}$ сходится в $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

9.14. **(a)** Разложите функцию $f(x) = x/2 - x^2/4\pi$ на отрезке $[0, 2\pi]$ в ряд Фурье по функциям e^{inx} $(n \in \mathbb{Z})$.

(b) Докажите формулу $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n)$ в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.