Напомним (см. лекцию), что если T — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, то его *сопряженный оператор* T^* действует в том же пространстве H и однозначно определяется формулой $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ $(x, y \in H)$. Оператор T называется *самосопряженным*, если $T^* = T$, и *нормальным*, если $TT^* = T^*T$.

8.0 (*C^*-тождество*)**.** Докажите, что для любого ограниченного линейного оператора T в гильбертовом пространстве справедливо равенство $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

8.1. Докажите, что для любого ограниченного линейного оператора T в гильбертовом пространстве H справедливо равенство $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$. Как следствие, $H = \operatorname{Ker} T^* \oplus \overline{\operatorname{Im} T}$.

8.2. Пусть P — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(1) существует такое замкнутое векторное подпространство $H_0 \subset H$, что $Px = x$ для $x \in H_0$ и $Px = 0$ для $x \in H_0^\perp$;

(2) $P = P^* = P^2$.

Такие операторы называются *ортогональными проекторами.*

8.3. Пусть U — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Докажите, что U изометричен тогда и только тогда, когда $U^*U = \mathbf{1}_H$.

Биективные изометрические операторы в гильбертовом пространстве называются *унитарными*; из предыдущей задачи следует, что ограниченный биективный оператор U унитарен тогда и только тогда, когда $U^* = U^{-1}$.

8.4. Пусть U — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Докажите, что $UU^* = \mathbf{1}_H$ тогда и только тогда, когда U изометрично отображает $(\operatorname{Ker} U)^\perp$ на H. Такие операторы называются *коизометрическими.*

8.5. Для каждого из следующих операторов найдите их сопряженные. Какие из этих операторов являются самосопряженными? изометрическими? коизометрическими? унитарными? нормальными? ортогональными проекторами? (Последние два вопроса не относятся к п. (e)).

(a) диагональный оператор в ℓ^2 (см. задачу 2.1);

(b) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^2(X, \mu)$;

(c) операторы левого и правого сдвига в ℓ^2;

(d) оператор двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$;

(e) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X, \mu)$ (см. задачу 2.7);

(f) оператор T в $L^2[0, 1]$, действующий по формуле

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

8.6. Вычислите норму оператора из п. (f) предыдущей задачи. (*Указание:* оператор T^*T компактен и самосопряжен.)

8.7 (*теорема Шмидта*)**.** Пусть T — компактный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Докажите, что существуют не более чем счетные ортонормированные системы (e_n) и (f_n) в H и набор положительных чисел (s_n), такие, что $Te_n = s_n f_n$, $Tx = 0$ при $x \perp \{e_n\}$ и $s_{n+1} \leqslant s_n$ для всех n. При этом числа (s_n) определены указанными условиями однозначно (они называются *s-числами* оператора T), и $s_n \to 0$ при $n \to \infty$, если эта последовательность бесконечна. (*Указание:* см. указание к предыдущей задаче.)

8.8. Докажите, что s-числа интегрального оператора Гильберта–Шмидта в $L^2(X, \mu)$ удовлетворяют условию $\sum_n s_n^2 < \infty$.

8.9-B (*эргодическая теорема фон Неймана*)**.** Пусть U — изометрия в гильбертовом пространстве H, и пусть P — ортогональный проектор на $\operatorname{Ker}(U - \mathbf{1})$. Докажите, что

$$Px = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k x \qquad (x \in H).$$

Указание: сначала докажите, что $\operatorname{Ker}(U - \mathbf{1}) = \operatorname{Ker}(U^* - \mathbf{1})$.