

7.1. Компактны ли операторы правого и левого сдвига в ℓ^p и c_0 ?

7.2. Может ли образ компактного оператора между банаховыми пространствами содержать бесконечномерное замкнутое подпространство?

7.3. Докажите компактность оператора вложения $C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$.

7.4. Пусть $f \in C[a, b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a, b]$. Найдите условие на f , необходимое и достаточное для компактности M_f .

7.5. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Найдите условие на f , необходимое и достаточное для компактности M_f .

7.6. Для интегрируемой функции f на $[0, 1]$ определим функцию Tf формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Является ли T компактным оператором (а) из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$? (б) из $L^p[0, 1]$ в $C[0, 1]$ (где $1 < p \leq \infty$)? (с) из $L^p[0, 1]$ в $L^p[0, 1]$ (где $1 < p \leq \infty$)? (д) из $L^1[0, 1]$ в $C[0, 1]$? (е) из $L^1[0, 1]$ в $L^1[0, 1]$?

7.7. Пусть $I = [a, b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Докажите компактность интегрального оператора $T: C(I) \rightarrow C(I)$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy.$$

7.8. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Докажите компактность интегрального оператора Гильберта–Шмидта $T: L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$,

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y)f(y) d\mu(y).$$

Указание: докажите, что линейная оболочка множества функций вида $K(x, y) = f(x)g(y)$, где $f, g \in L^2(X, \mu)$, плотна в $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и воспользуйтесь тем, что $\|T\| \leq \|K\|_2$ (см. задачу 2.7).

7.9. Пусть X — метризуемый компакт, μ — регулярная борелевская мера на X и $K \in C(X \times X)$. Докажите, что образ интегрального оператора Гильберта–Шмидта $T_K: L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$ содержится в $C(X)$, и что T_K является компактным оператором из $L^2(X, \mu)$ в $C(X)$.

7.10. Пусть X — банахово пространство и $1 \leq p < \infty$. Докажите, что всякий компактный оператор $T: X \rightarrow \ell^p$ аппроксимируется по операторной норме операторами конечного ранга.

7.11. Пусть X — банахово пространство.

(а) Для $x \in X$ и $f \in X^*$ определим оператор $x \otimes f \in \mathcal{B}(X)$ формулой $(x \otimes f)(y) = f(y)x$. Представьте операторы $T(x \otimes f)$, $(x \otimes f)T$ (где $T \in \mathcal{B}(X)$) и $(x_1 \otimes f_1)(x_2 \otimes f_2)$ в виде $y \otimes g$ для некоторых $y \in X$ и $g \in X^*$.

(б) Пусть $0 \neq I \subseteq \mathcal{B}(X)$ — двусторонний идеал. Докажите, что $I \supseteq \mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}(X)$ — идеал операторов конечного ранга. Как следствие, всякий ненулевой замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{B}(H)$ (где H — гильбертово пространство) содержит $\mathcal{K}(H)$. (Замечание: если H сепарабельно и бесконечномерно, то $\mathcal{K}(H)$ — единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathcal{B}(H)$). Мы сможем это доказать в следующем семестре.)