6.1. Пусть $K \subset C([a,b],\mathbb{R})$ — компактное множество. Докажите непрерывность функций $x \mapsto \sup_{f\in K} f(x)$ и $x \mapsto \inf_{f\in K} f(x)$. Верно ли это утверждение, если K ограничено, но не компактно?

6.2. Докажите, что подмножество $S \subset \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\sup_{x\in S} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

(т.е. нормы «хвостов» последовательностей из S равномерно стремятся к нулю).

6.3. Докажите, что подмножество $S \subset c_0$ относительно компактно тогда и только тогда, когда существует такой элемент $y \in c_0$, что $|x_n| \leqslant |y_n|$ для всех $x \in S$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Верно ли аналогичное утверждение для ℓ^p?

6.4-B. Докажите, что подмножество $S \subset L^p(\mathbb{R})$ (где $1 \leqslant p < \infty$) относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и удовлетворяет следующим условиям:

$$\sup_{f\in S} \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f(t)|^p\, dt \to 0 \quad \text{при } n \to \infty;$$
$$\sup_{f\in S} \int_{\mathbb{R}} |f(t+h) - f(t)|^p\, dt \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Указание (достаточность). Функции $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt$ непрерывны и сходятся к f равномерно на S. С другой стороны, при фиксированном h семейство $\{f_h : f \in S\}$ равностепенно непрерывно на каждом отрезке.

6.5 (*необходимость компактности в теореме Шаудера*)**.** Приведите пример банахова пространства X и непрерывного отображения $f\colon B \to B$, где B — замкнутый шар в X, не имеющего неподвижных точек.

6.6. Пусть $\Phi\colon [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ — непрерывная ограниченная функция. Докажите, что для каждой функции $\psi \in C[0,1]$ существует функция $x \in C[0,1]$, удовлетворяющая уравнению

$$x(t) = \psi(t) + \int_0^1 \Phi(s,t,x(s))\, ds \qquad (t \in [0,1]).$$