5.1. Докажите, что размерность бесконечномерного банахова пространства несчетна.

5.2 (*необходимость полноты в теореме Банаха–Штейнгауза*)**.** Приведите пример нормированного пространства X и последовательности (f_n) в X^*, ограниченной на каждом векторе (т.е. такой, что для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))$ ограничена), но не ограниченной по норме.

5.3. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства.
(a) Докажите, что билинейный оператор $T\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда существует такое $C \geqslant 0$, что $\|T(x,y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X,\ y \in Y$.
(b) Предположим, что X либо Y полно. Докажите, что любой раздельно непрерывный билинейный оператор $X \times Y \to Z$ непрерывен. (Раздельная непрерывность здесь означает, что для любых $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ отображения $Y \to Z$, $y \mapsto T(x_0, y)$, и $X \to Z$, $x \mapsto T(x, y_0)$, непрерывны. *Указание:* воспользуйтесь теоремой Банаха–Штейнгауза).
(c) Верно ли утверждение из п. (b) без предположения о полноте?

5.4-B. Пусть G — компактная топологическая группа и π — ее представление в банаховом пространстве X, непрерывное в том смысле, что отображение $G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto \pi(g)x$, непрерывно. Докажите, что на X существует эквивалентная норма, относительно которой все операторы $\pi(g)$ изометричны.

5.5. **(a)** Выведите теорему об обратном операторе из теоремы о замкнутом графике.
(c) Выведите теорему Банаха–Штейнгауза из теоремы о замкнутом графике.

5.6 (*необходимость полноты в теореме Банаха об обратном операторе*)**.** **(a)** Приведите пример банахова пространства X, нормированного пространства Y и биективного ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$, обратный к которому неограничен.
(b)-B Приведите пример нормированного пространства X, банахова пространства Y и биективного ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$, обратный к которому неограничен.

5.7. Предположим, что пространство $L^1(\mathbb{R})$ полно относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, причем из сходимости $f_n \to f$ по этой норме следует, что $\int_{-\infty}^t f_n(s)\,ds \to \int_{-\infty}^t f(s)\,ds$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Докажите, что норма $\|\cdot\|$ эквивалентна обычной норме на $L^1(\mathbb{R})$.

Определение 5.1. Векторное подпространство X_0 нормированного пространства X называется *дополняемым*, если существует такое векторное подпространство $X_1 \subset X$, что отображение $X_0 \oplus X_1 \to X,\ (x_0, x_1) \mapsto x_0 + x_1$, — топологический изоморфизм.

5.8. Докажите, что дополняемое подпространство $X_0 \subset X$ замкнуто в X.

5.9. Докажите, что замкнутое подпространство X_0 банахова пространства X дополняемо тогда и только тогда, когда $X = X_0 \oplus X_1$ для некоторого замкнутого подпространства $X_1 \subset X$.

5.10. Докажите, что векторное подпространство нормированного пространства X дополняемо тогда и только тогда, когда оно является образом некоторого ограниченного проектора P в X (т.е. оператора, удовлетворяющего условию $P^2 = P$).

5.11. Докажите, что **(1)** каждое конечномерное подпространство и **(2)** каждое замкнутое подпространство конечной коразмерности дополняемы в любом нормированном пространстве.

5.12. Докажите, что все замкнутые подпространства гильбертова пространства дополняемы.

5.13. Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.
Указание. Можно действовать следующим образом:
1) Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).
2) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.
3) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

На самом деле существование недополняемых подпространств — это закономерность, а не патология. Как показали Линденштраусс и Цафрири в 1971 г., если в некотором банаховом пространстве все закнутые подпространства дополняемы, то оно топологически изоморфно гильбертову пространству.