4.1. Покажите, что норма на пространствах $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, ℓ^p, $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой, содержащее хотя бы два непересекающихся измеримых подмножества конечной положительной меры) при $p \neq 2$ и $n > 1$ не порождается никаким скалярным произведением.

4.2. Придумайте обобщение тождества параллелограмма на случай n векторов.

4.3. Покажите, что норма на пространствах ℓ^p, $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой, содержащее бесконечно много непересекающихся измеримых подмножеств конечной положительной меры) при $p \neq 2$ не эквивалентна никакой норме, порожденной скалярным произведением.

4.4. Пусть $H = C[-1,1]$ со скалярным произведением $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$. Положим

$$H_0 = \left\{ f \in H : \int_{-1}^0 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt \right\}.$$

(a) Докажите, что H_0 — замкнутое векторное подпространство в H.
(b) Верно ли, что $H = H_0 \oplus H_0^\perp$?

4.5. Докажите, что в любом неполном евклидовом пространстве H существует такое замкнутое векторное подпространство H_0, что $H_0 \oplus H_0^\perp \neq H$.

4.6. Докажите, что пространство $C_c^\infty(a,b)$ гладких функций на интервале (a,b) с компактным носителем плотно в $L^p[a,b]$ для всех $1 \leqslant p < \infty$.

Определение 4.1. Пусть $f \in L^2[a,b]$. Функция $f' \in L^2[a,b]$ называется *обобщенной производной* функции $f \in L^2[a,b]$, если

$$\int_a^b f'\varphi\,dt = -\int_a^b f\varphi' dt$$

для всех $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$.

4.7. Докажите, что если $f \in L^2[a,b]$ обладает обобщенной производной f', то f' единственна (как элемент пространства $L^2[a,b]$).

4.8. *Пространство Соболева* $W^{1,2}(a,b)$ определяется как множество всех $f \in L^2[a,b]$, обладающих обобщенной производной $f' \in L^2[a,b]$. Докажите, что $W^{1,2}(a,b)$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b (f\bar{g} + f'\bar{g}')\,dt.$$

Ортонормированная система в евклидовом пространстве H называется *максимальной*, если она не содержится ни в какой большей ортонормированной системе, и *тотальной*, если ее линейная оболочка плотна в H. Всякая тотальная ортонормированная система максимальна, а если H — гильбертово пространство, то эти два свойства друг другу эквивалентны.

4.9. (a) Пусть (e_n) — стандартный ортонормированный базис в пространстве ℓ^2. Положим $x = \sum_n n^{-1}e_n$ и $H_0 = \mathrm{span}\{x, e_2, e_3, \ldots\}$. Покажите, что $(e_2, e_3, \ldots)$ — максимальная ортонормированная система в H_0, не являющаяся тотальной.
(b) Докажите, что в любом неполном сепарабельном евклидовом пространстве существует максимальная ортонормированная система, не являющаяся тотальной.

4.10 (*пространство Харди*)**.** Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Обозначим через H^2 пространство всех голоморфных функций $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \Big)^{1/2} < \infty.$$

(a) Докажите, что отображение $f \mapsto (c_n(f))_{n \geqslant 0}$, где $c_n(f)$ — n-ый тейлоровский коэффициент функции f в нуле, является изометрическим изоморфизмом между $(H^2, \|\cdot\|)$ и $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$. Таким образом, H^2 — гильбертово пространство.
(b) Докажите, что для каждого $w \in \mathbb{D}$ линейный функционал $F_w\colon H^2 \to \mathbb{C}$, $F_w(f) = f'(w)$, ограничен.
(c) В силу теоремы Рисса и п. (b), для каждого $w \in \mathbb{D}$ существует единственная функция $g_w \in H^2$, удовлетворяющая условию $F_w(f) = \langle f, g_w \rangle$ для всех $f \in H^2$. Найдите явную формулу для $g_w(z)$.

4.11 (*пространство Бергмана*)**.** Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Обозначим через $L^2_a(\mathbb{D})$ пространство всех голоморфных функций $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\| = \Big(\int_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^2 \, dx \, dy \Big)^{1/2} < \infty.$$

(a) Докажите, что $L^2_a(\mathbb{D})$ — замкнутое векторное подпространство в $L^2(\mathbb{D})$. Следовательно, $L^2_a(\mathbb{D})$ — гильбертово пространство.
(b) Докажите, что для каждого $w \in \mathbb{D}$ линейный функционал $F_w\colon L^2_a(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$, $F_w(f) = f(w)$, ограничен.
(c) В силу теоремы Рисса и п. (b), для каждого $w \in \mathbb{D}$ существует единственная функция $g_w \in L^2_a(\mathbb{D})$, удовлетворяющая условию $F_w(f) = \langle f, g_w \rangle$ для всех $f \in L^2_a(\mathbb{D})$. Найдите явную формулу для $g_w(z)$.

4.12 (*тождество поляризации*)**.** Пусть f — полуторалинейная форма на векторном пространстве H. Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, и пусть $\zeta \in \mathbb{C}$ — корень из 1 степени n, $\zeta \neq \pm 1$. Докажите, что

$$f(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k f(x + \zeta^k y, x + \zeta^k y).$$

Тождество поляризации позволяет, в частности, восстановить скалярное произведение на евклидовом пространстве из порожденной этим скалярным произведением нормы. Может возникнуть искушение использовать тождество поляризации для того, чтобы «доказать», что *любая* норма порождается скалярным произведением. Разумеется, последнее утверждение неверно (см. задачу 4.1), однако оно оказывается верным при выполнении тождества параллелограмма:

4.13-В (*теорема фон Ноймана–Йордана*)**.** Пусть H — нормированное пространство, в котором выполняется тождество параллелограмма. Покажите, что формула

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 \qquad (x, y \in H)$$

задает скалярное произведение на H, и что норма, порожденная этим скалярным произведением, совпадает с исходной.