3.1. Докажите полноту пространств ℓ^p (где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) и c_0.

3.2. Докажите, что пространство $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ неполно для любого $p \in [1, +\infty]$, и что пространство $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ неполно при $q > p$. Опишите пополнения этих пространств.

3.3. Докажите, что счетномерное нормированное пространство не может быть полным.

3.4. При $p < \infty$ предъявите фундаментальную последовательность в нормированном пространстве $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, не имеющую предела. Опишите пополнение этого пространства.

3.5. Докажите полноту пространства $C^n[a,b]$ относительно нормы $\|f\| = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$. Полно ли это пространство относительно равномерной нормы? Если нет, то опишите его пополнение.

3.6. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что пространство $L^\infty(X, \mu)$ полно.

Пространства $L^p(X, \mu)$ полны для всех $p \in [1, +\infty]$. Для $p = 1$ и/или $p = 2$ это обычно доказывается в курсе анализа (при обсуждении интеграла Лебега). Для произвольного $p < +\infty$ доказательство аналогично случаю $p = 1$.

3.7. Постройте изометрические изоморфизмы **(a)** $\ell^\infty \xrightarrow{\sim} (\ell^1)^*$; **(b)** $\ell^1 \xrightarrow{\sim} (c_0)^*$; **(c)** $\ell^q \xrightarrow{\sim} (\ell^p)^*$, где $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$. Можно ли тем же способом построить изометрический изоморфизм $\ell^1 \cong (\ell^\infty)^*$?

3.8-B. Докажите, что c_0 не является топологически изоморфным сопряженному ни к какому нормированному пространству.

3.9-B. Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной мерой. Постройте изометрические изоморфизмы **(a)** $L^\infty(X, \mu) \xrightarrow{\sim} (L^1(X, \mu))^*$; **(b)** $L^p(X, \mu) \xrightarrow{\sim} (L^q(X, \mu))^*$, где $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$.
Подсказка. Для доказательства сюръективности построенных отображений пригодится теорема Радона–Никодима.

3.10. Докажите, что линейный функционал на нормированном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто. Верно ли аналогичное утверждение для линейных операторов?

3.11. Докажите, что на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует разрывный линейный функционал.

Подсказка: воспользуйтесь тем, что в любом векторном пространстве есть алгебраический базис (т.е. максимальное линейно независимое подмножество).

3.12. Пусть X — нормированное пространство.
(a) Докажите, что если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно.
(b) Верно ли обратное?
(c) Покажите, что не существует топологического изоморфизма между $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1.