**2.1.** Пусть $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или $c_0$. *Диагональный оператор* $M_\alpha\colon X \to X$ переводит вектор $x \in X$ в вектор $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.
**(a)** Докажите, что $M_\alpha$ ограничен. **(b)** Вычислите его норму.

**2.2.** Зафиксируем точку $t_0 \in [a,b]$ и рассмотрим линейный функционал

$$F\colon (C[a,b], \|\cdot\|_p) \to \mathbb{K}, \quad F(x) = x(t_0).$$

**(a)** При каких $p \in [1,+\infty]$ функционал $F$ ограничен? **(b)** Найдите его норму.

**2.3.** Пусть $X = (C[a,b], \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, и пусть $f \in C[a,b]$. *Оператор умножения* $M_f\colon X \to X$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in X).$$

**(a)** Докажите, что $M_f$ ограничен. **(b)** Вычислите его норму.

**2.4.** Пусть $(X,\mu)$ — пространство с мерой, и пусть $f\colon X \to \mathbb{K}$ — существенно ограниченная измеримая функция. Зафиксируем $p \in [1,+\infty]$. *Оператор умножения* $M_f\colon L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in L^p(X,\mu)).$$

**(a)** Докажите, что $M_f$ ограничен. **(b)** Вычислите его норму.

**2.5.** Пусть $X = L^p[0,1]$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$. Определим оператор $T\colon X \to X$ формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (f \in X).$$

**(a)** Докажите, что $T$ ограничен. **(b)** Для $p = 1$ и $p = \infty$ вычислите его норму.
*Анонс:* для $p = 2$ норма этого оператора равна $2/\pi$. В свое время мы это сможем доказать.

**2.6.** Пусть $I = [0,1]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. *Интегральный оператор* $T\colon C(I) \to C(I)$ задается формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy.$$

Докажите, что $T$ действительно отображает $C(I)$ в $C(I)$, что он ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_\infty$.

**2.7.** Пусть $(X,\mu)$ — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X\times X, \mu\times\mu)$. *Интегральный оператор Гильберта–Шмидта* $T\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ задается формулой

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\,d\mu(y).$$

Докажите, что $T$ действительно отображает $L^2(X,\mu)$ в $L^2(X,\mu)$, что он ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$.

**2.8.** Линейный функционал $F$ на $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ задан формулой

$$F(f) = 2f(0) - 3f(1) + \int_0^1 f(t)\,dt.$$

**(a)** Докажите, что $F$ ограничен. **(b)** Вычислите $\|F\|$.

**2.9.** Пусть $X, Y$ — нормированные пространства, причем $X$ конечномерно. Докажите, что любой линейный оператор $T\colon X \to Y$ ограничен.

**2.10.** Пусть $X, Y$ — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *коизометрией*, если он отображает открытый единичный шар пространства $X$ на открытый единичный шар пространства $Y$.
**(a)** Докажите, что если $T$ отображает замкнутый единичный шар пространства $X$ на замкнутый единичный шар пространства $Y$, то $T$ — коизометрия.
**(b)** Верно ли обратное утверждение?
**(c)** Докажите, что инъективная коизометрия — это то же самое, что изометрический изоморфизм.

**2.11.** Пусть $\alpha \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или $c_0$. При каких условиях на $\alpha$ диагональный оператор $M_\alpha\colon X \to X$ **(a)** топологически инъективен; **(b)** открыт; **(c)** изометричен; **(d)** коизометричен?

**2.12.** Ответьте на те же четыре вопроса для оператора умножения из задачи 2.4.