Соглашение. Все векторные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1. Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что операции сложения $X \times X \to X$ и умножения на число $\mathbb{K} \times X \to X$ непрерывны.

1.2. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство. Докажите, что его замыкание $\overline{X_0}$ — тоже векторное подпространство в X.

1.3. Пусть $p, q \in (1, +\infty)$, и пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(a) Докажите *неравенство Юнга*:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a, b \geqslant 0).$$

(b) Из неравенства Юнга выведите *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

(c) Из неравенства Гёльдера выведите *неравенство Минковского*:

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

1.4. Нарисуйте единичный шар на плоскости $\mathbb{R}^2$, снабженной нормой $\|\cdot\|_p$, для различных $p \in [1, +\infty]$. Обратите внимание на случаи $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. Что происходит с единичным шаром с ростом p?

1.5. Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — две нормы на векторном пространстве X, и пусть B и B' — соответствующие замкнутые единичные шары. Докажите, что $B \subseteq B' \iff \|\cdot\|' \leqslant \|\cdot\|$.

1.6. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.
(a) Докажите, что $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p$ на $\mathbb{K}^n$.
(b) Докажите, что существует такая константа $C = C_{n,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на пространстве $\mathbb{K}^n$.
(c) Можно ли эту константу выбрать не зависящей от n?
(d) Найдите наименьшую константу $C_{n,p,q}$ с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.

1.7. Пусть c_{00} — пространство всех *финитных* последовательностей (т.е. числовых последовательностей $x = (x_n)$, для каждой из которых существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n = 0$ для всех $n > N$). Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на c_{00} при $p \neq q$?

1.8. Докажите, что последовательность $(x^{(k)})$ в пространстве $\mathbb{K}^n$ сходится к вектору $x \in \mathbb{K}^n$ по норме $\|\cdot\|_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) тогда и только тогда, когда она сходится к x покоординатно.

1.9. **(a)** Докажите, что c_0 замкнуто в ℓ^∞. **(b)** Чему равно замыкание ℓ^p в ℓ^∞?

1.10. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. **(a)** Докажите, что $\ell^p \subset \ell^q$, но $\ell^p \neq \ell^q$ при $p \neq q$. **(b)** Чему равна норма оператора вложения ℓ^p в ℓ^q?

1.11. Пусть X — полунормированное пространство, и пусть $N = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. Покажите, что формула

$$\|x + N\|^\wedge = \|x\| \qquad (x \in X)$$

корректно определяет норму на X/N. (Корректность в данном случае означает, что правая часть этой формулы зависит лишь от класса $x + N \in X/N$, а не от самого элемента $x \in X$).

Если (X, μ) — пространство с мерой и $p \in [1, +\infty)$, то через $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ обозначается множество всех таких измеримых функций $f\colon X \to \mathbb{K}$, что функция $|f|^p$ μ-интегрируема. Следующая задача показывает, что $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ — полунормированное пространство. Ассоциированное с ним нормированное пространство $\mathscr{L}^p(X, \mu)/\{f : \|f\|_p = 0\} = \mathscr{L}^p(X, \mu)/\{f : f = 0 \text{ п.в.}\}$ (см. задачу 1.11) обозначается через $L^p(X, \mu)$.

1.12. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $p, q \in (1, +\infty)$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(a) Докажите, что если $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$ и $g \in \mathscr{L}^q(X, \mu)$, то функция fg интегрируема и справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\int_X |fg|\, d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

(b) Из неравенства Гёльдера выведите, что $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ — векторное пространство, и что справедливо *неравенство Минковского*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (f, g \in \mathscr{L}^p(X, \mu)).$$

1.13. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.
(a) Докажите, что существует такая константа $C = C_{a,b,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на пространстве $C[a, b]$.
(b) Найдите наименьшую константу $C_{a,b,p,q}$ с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.
(c) Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $C[a, b]$ при $p \neq q$?

Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть f — существенно ограниченная (т.е. ограниченная на множестве полной меры) функция на X. *Существенная верхняя грань* функции $|f|$ определяется формулой

$$\operatorname{ess\,sup} |f| = \inf \Big\{ \sup_{x \in E} |f(x)| : E \subset X,\ \mu(X \setminus E) = 0 \Big\}. \tag{1}$$

1.14. Докажите, что inf в формуле (1) достигается. Как следствие, $\operatorname{ess\,sup} |f| = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$ п.в.

1.15. Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что $\operatorname{ess\,sup} |f| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Множество всех существенно ограниченных функций на пространстве с мерой (X, μ) обозначается через $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$. Следующая задача показывает, что $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ — полунормированное пространство. Ассоциированное с ним нормированное пространство $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)/\{f : \|f\|_\infty = 0\} = \mathscr{L}^\infty(X, \mu)/\{f : f = 0 \text{ п.в.}\}$ (см. задачу 1.11) обозначается через $L^\infty(X, \mu)$.

1.16. Докажите, что $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ — векторное пространство, и что формула

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$$

задает полунорму на $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$.

1.17. Пусть $\mu(X) < \infty$. Докажите, что $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Чему равна норма оператора вложения $L^q(X, \mu)$ в $L^p(X, \mu)$?

1.18. Докажите, что $L^p[a, b] \neq L^q[a, b]$ при $p \neq q$.

Замечание. Результат задачи 1.17 не переносится на случай $\mu(X) = \infty$. В самом деле, пусть $X = \mathbb{N}$, и пусть μ — «считающая» мера на σ-алгебре всех подмножеств $\mathbb{N}$, заданная формулой $\mu(A) = |A|$ (число элементов в A). Из определения интеграла Лебега легко следует, что $L^p(\mathbb{N}, \mu) = \ell^p$ для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Согласно задаче 1.10, в данном случае пространства $L^p(\mathbb{N}, \mu)$ не убывают, а возрастают с ростом p. А следующая задача показывает, что в общем случае пространства $L^p(X, \mu)$ при разных p вообще никак не связаны между собой.

1.19. Покажите, что $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R})$ при $p \neq q$.