

Экзаменационная программа курса «Функциональный анализ»

Часть 1: осень 2015, лектор: профессор В. И. Богачев

1. Метрические, банаховы и гильбертовы пространства. Примеры: пространства непрерывных функций, интегрируемых функций и пространства последовательностей. Изометричность метрического пространства части банахова пространства ограниченных функций на нем.
2. Компакты. Критерии компактности в бесконечномерных пространствах.
3. Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
4. Теоремы о неподвижных точках: теорема о сжимающих отображениях и теорема Шаудера. Применения.
5. Ортонормированные системы и базисы в гильбертовых пространствах. Неравенство Бесселя.
6. Ортогональные проекции и ортогональные разложения в гильбертовом пространстве.
7. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Равенство Парсеваля. Примеры базисов. Теорема Рисса – Фишера об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
8. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и непрерывность оператора. Теорема Банаха – Штейнгауза.
9. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам (без доказательства).
10. Теорема Хана – Банаха и ее следствия.
11. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
12. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.
13. Самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах. Теорема Гильберта – Шмидта. Применение к интегральным уравнениям.
14. Спектр оператора. Компактность спектра. Спектр компактного самосопряженного оператора.
15. Преобразование Фурье в L^1 и его основные свойства.
16. Класс S и формула обращения преобразования Фурье в нем.
17. Равенство Парсеваля и преобразование Фурье в L^2 .
18. Обобщенные функции классов D' и S' . Производная обобщенной функции. Примеры. Классы Соболева.