О ГЕОМЕТРИЯХ КАК ДИСЦИПЛИНАХ

С.С.Акбаров

Со времен изобретения первых оптических приборов в физике утвердилась идея, что видимый образ наблюдаемого объекта зависит от инструментов наблюдения. Один из способов формализовать ее в математике – конструкция, сопоставляющая произвольному объекту A категории $\mathtt{K}$ его *оболочку* $\mathsf{Env}^{\Omega}_{\Phi} A$ в заданном классе морфизмов Ω (интерпретируемом как *класс представлений*) относительно заданного класса морфизмов Φ (интерпретируемого как *класс инструментов наблюдения*). Оказывается, что если в качестве $\mathtt{K}$ фиксировать какую-нибудь достаточно широкую категорию топологических алгебр (например, категорию стереотипных алгебр), то каждый выбор классов Ω и Φ будет определять некую "проекцию функционального анализа в геометрию", причем стандартные математические дисциплины – *комплексная геометрия*, *дифференциальная геометрия* и *топология* – становятся частными примерами этой конструкции. Наглядно детали этих построений и их результаты удобно изобразить в виде следующей таблицы:

Дисциплина	**Комплексная геометрия**	**Дифференциальная геометрия**	**Топология**
Руководящий пример видимого образа	Алгебра $\mathcal{O}(M)$ голоморфных функций на комплексном многообразии M	Алгебра $\mathcal{E}(M)$ гладких функций на гладком многообразии M	Алгебра $\mathcal{C}(M)$ непрерывных функций на топологическом пространстве M
Инструменты наблюдения Φ	Гомоморфизмы в банаховы алгебры	Дифференциальные инволютивные гомоморфизмы в C^*-алгебры с присоединенными нильпотентами	Инволютивные гомоморфизмы в C^*-алгебры
Класс представлений Ω	Плотные эпиморфизмы	Плотные эпиморфизмы	Плотные эпиморфизмы
Видимый образ объекта A	Голоморфная оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{O}} A$	Гладкая оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A$	Непрерывная оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A$
Базовое представление	$\mathsf{Env}_{\mathcal{O}} A = \mathcal{O}(M)$ для подалгебры $A \subseteq \mathcal{O}(M)$	$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A = \mathcal{E}(M)$ для подалгебры $A \subseteq \mathcal{E}(M)$	$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A = \mathcal{C}(M)$ для подалгебры $A \subseteq \mathcal{C}(M)$
Диаграмма рефлексивности	$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^\star(G) & \overset{\mathsf{Env}_{\mathcal{O}}}{\longmapsto} & \mathcal{O}^\star_{\exp}(G) \\ {}^\star\uparrow & & \downarrow{}^\star \\ \mathcal{O}(G) & \underset{\mathsf{Env}_{\mathcal{O}}}{\longleftarrow\!\shortmid} & \mathcal{O}_{\exp}(G) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^\star(G) & \overset{\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}}{\longmapsto} & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,\mathcal{E}^\star(G) \\ {}^\star\uparrow & & \downarrow{}^\star \\ \mathcal{E}(G) & \underset{\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}}{\longleftarrow\!\shortmid} & \mathcal{K}_\infty(G) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\star(G) & \overset{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}}{\longmapsto} & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \\ {}^\star\uparrow & & \downarrow{}^\star \\ \mathcal{C}(G) & \underset{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}}{\longleftarrow\!\shortmid} & \mathcal{K}(G) \end{array}$
Диаграмма рефлексивности для коммутативных групп	$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^\star(G) & \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} & \mathcal{O}(\widehat{G}) \\ {}^\star\uparrow & & \downarrow{}^\star \\ \mathcal{O}(G) & \underset{\mathcal{F}}{\longleftarrow\!\shortmid} & \mathcal{O}^\star(\widehat{G}) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^\star(G) & \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} & \mathcal{E}(\widehat{G}) \\ {}^\star\uparrow & & \downarrow{}^\star \\ \mathcal{E}(G) & \underset{\mathcal{F}}{\longleftarrow\!\shortmid} & \mathcal{E}^\star(\widehat{G}) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\star(G) & \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} & \mathcal{C}(\widehat{G}) \\ {}^\star\uparrow & & \downarrow{}^\star \\ \mathcal{C}(G) & \underset{\mathcal{F}}{\longleftarrow\!\shortmid} & \mathcal{C}^\star(\widehat{G}) \end{array}$

Мы поговорим о том, как работает и что позволяет увидеть эта схема в различных геометрических дисциплинах.