Дифференциальная геометрия
ВШЭ, осенний семестр 2015 года
Листок 1
08 сентября 2015 г.

1. Найдите выражения для базисных векторных полей и 1-форм $\partial_x, \partial_y, dx, dy$ на плоскости, а также формы площади $dx \wedge dy$ в полярных координатах на той же плоскости. Найдите выражения для базисных полей и 1-форм $\partial_\rho, \partial_\varphi, d\rho, d\varphi$ полярной системы координат на плоскости в декартовых координатах.

2. Вычислите поток векторного поля $(1+y^2)\,\partial_x - y\,\partial_y$. Найдите систему координат, в которой это поле выпрямляется.

3. Докажите, что существует система координат (u, v) в окрестности начала координат плоскости, в которой заданные два векторных поля $A = (1+y)\,\partial_x + x\,\partial_y$ и $B = x\,\partial_x + (1+y)\,\partial_y$ принимают *одновременно* вид $A = \partial_u$, $B = \partial_v$. Найдите такую систему координат.

4. Даны 4 пары, состоящие из векторного поля и 1-формы: а) $(1-y)\,\partial_y + y^2\partial_x$ и $(1+y)\,dy + dx$, б) $(1+y)\,\partial_x - x\,\partial_y$ и $(1+y)\,dy + x\,dx$, в) ∂_x и dx, г) ∂_x и dy. Для каких из них существуют замены координат, переводящие одну пару в другую? Найдите соответствующие замены.

5. Значение дифференциала 1-формы a на паре векторных полей ξ, η задается равенством
$$da(\xi, \eta) = \partial_\xi\, a(\eta) - \partial_\eta\, a(\xi) - a([\xi, \eta]).$$
Докажите, что выражение в правой части действительно определяет 2-форму, то есть что оно кососимметрично и билинейно относительно умножения *на функции* векторных полей ξ, η.

6. Вычислите коммутатор векторных полей $u = \partial_x$ и $v = f(x)\,\partial_y$, где f — гладкая функция. Вычислите явно потоки этих полей и коммутатор этих потоков. Восстановите знак в равенстве
$$g_v^{-s} g_u^{-t} g_v^s g_u^t x = x \pm s\,t\,[u, v] + \ldots,$$
где точками обозначены члены более высокого порядка малости.

Дифференциальная геометрия
ВШЭ, осенний семестр 2015 года
Листок 2
15 сентября 2015 г.

1. Опишите карты и функции склейки в пространстве TM касательного расслоения гладкого многообразия.

2. Приведите Ваше любимое определение коммутатора векторных полей. Докажите тождество Якоби

$$[[u,v],w]+[[v,w],u]+[w,u],v]=0.$$

3. Сопоставим всякому линейному преобразованию A векторного пространства $\mathbb{R}^n$ линейное векторное поле $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}x_i\frac{\partial}{\partial x_j}$ в этом пространстве, где $a_{i,j}$ — компоненты матрицы преобразования A. Какой операции в пространстве матриц соответствует коммутатор линейных векторных полей?

4. Дайте определение групп Ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{Sp}(2n)$. Опишите алгебры Ли этих групп и вычислите размерность.

5. Приведите примеры групп и алгебр Ли, отличных от перечисленных в предыдущей задаче.

   Пусть группа Ли G действует диффеоморфизмами на гладком многообразии M. На лекции всякому элементу алгебры Ли группы G сопоставлялось векторное поле на этом многообразии как соответствующий «инфинитезимальный диффеоморфизм». Поток этого поля за единицу времени задает диффеоморфизм многообразия M, лежащий в группе G. Построенное отображение из алгебры Ли группы G в саму группу не зависит от выбора многообразия M, на котором группа действует, и называется *экспоненциальным отображением*. Обозначается оно через exp.

6. Восстановите знак в равенстве

$$\exp(-sv)\exp(-tu)\exp(sv)\exp(tu)=E\pm s\,t\,[u,v]+\ldots,$$

   где точками обозначены члены более высокого порядка малости.

Дифференциальная геометрия
Листок 3
22 сентября 2015 г.

Параметризация $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ кривой в евклидовом пространстве называется *натуральной*, если $|\dot\gamma| = |\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}| \equiv 1$. Для натуральной параметризации $d\tau$ — элемент длины на кривой и выполняется $(\dot\gamma, \ddot\gamma) = 0$. Величина $k = |\ddot\gamma|$ (вычисленная в натуральной параметризации) называется *кривизной кривой* γ; *радиусом кривизны* называется обратная величина $R = \frac{1}{k}$.

1. Определите кривизну а) окружности радиуса R; б) кривой, заданной как график функции с критической точкой в начале координат и разложением Тейлора $y = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ в этой точке; в) параболы $y = \frac{a}{2}x^2$; г) винтовой кривой $(a\cos t,\ a\sin t,\ b\,t)$.

2. Выведите формулу для кривизны кривой в произвольной параметризации а) на плоскости; б) в $\mathbb{R}^3$.

   Из всех окружностей, касающихся кривой на плоскости в данной точке, наибольший порядок касания (по крайней мере кубический) имеет окружность, радиус которой равен радиусу кривизны. Центр такой окружности называется *центром кривизны*. Множество центров кривизны образует кривую, которую, в зависимости от контекста, называют *эволютой*, *каустикой*, или *фокальным множеством*.

3. Докажите, что эволюта является огибающей семейства нормалей (т.е. что всякая нормаль касается эволюты в соответствующей точке).

4. Докажите, что эволюта имеет особенности (в общем случае, полукубического типа) в точках, соответствующих экстремумам (локальным максимумам и минимумам) кривизны.

5. Изобразите фокальное множество а) параболы б) эллипса.

   Для поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной параметрически $r = r(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2))$, коэффициенты *римановой метрики* (первой квадратичной формы) $g = g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2^2$ задаются равенствами

$$g_{ij} = (r_i, r_j), \quad r_i = \frac{\partial r}{\partial u_i}.$$

   Альтернативно, метрику можно найти подстановкой в $dx^2+dy^2+dz^2$ выражений для дифференциалов координатных функций x, y, z выбранной параметризации поверхности.
   Величины, для вычисления которых достаточно знать риманову метрику, относят к *внутренней геометрии* поверхности. В частности, к внутренней геометрии поверхности относятся вычисления длин, углов и площадей. Например, *элемент площади* задается 2-формой $\sigma = \sqrt{|\det g|}\ du_1\wedge du_2$.
   Коэффициенты *второй квадратичной формы* поверхности $h = h_{11}du_1^2 + 2h_{12}du_1du_2 + h_{22}du_2^2$ задаются равенствами

$$h_{ij} = (r_{ij}, n) = -(r_i, \tfrac{\partial n}{\partial u_j}), \qquad r_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j},$$

где $n = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$ — вектор единичной нормали к поверхности.
Главные кривизны $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения $\det(h - \lambda g) = 0$.
Гауссова кривизна $K = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det h}{\det g}$, *средняя кривизна* $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

6. Определите риманову метрику, форму площади, вторую квадратичную форму, гауссову и среднюю кривизны для следующих поверхностей:
а) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

б) график функции с критической точкой в начале координат и разложением Тейлора $z = a\,x^2 + b\,y^2 + \dots$ в этой точке;

в) параболоид вращения $z = \frac{a}{2}\,(x^2 + y^2)$;

г) тор $\big((R + r\cos\varphi)\cos\psi,\ (R + r\cos\varphi)\sin\psi,\ z = r\sin\varphi\big)$.

Пусть кривая γ лежит на поверхности в $\mathbb{R}^3$. Ее *нормальной* k_n и *геодезической* k_g кривизнами называются длины ортогональной проекции вектора $\ddot{\gamma}$, вычисленного в нормальной параметризации, на нормальную прямую и касательную плоскость поверхности, соответственно. По теореме Пифагора, $k^2 = k_n^2 + k_g^2$.

7. Докажите, что нормальная кривизна кривой зависит только от направления ее касательной. Вычислите нормальную кривизну кривой, образующей угол θ с одним из главных направлений поверхности.

8. Вычислите нормальную и геодезическую кривизны а) окружности радиуса r на сфере радиуса R; б) кривой на *гиперболическом параболоиде* $z = x\,y$, высекаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

«Блистательная теорема» Гаусса (**Theorema Egregium**) утверждает, что, в отличие от средней кривизны, *гауссова кривизна относится к внутренней геометрии поверхности*, то есть может быть выражена через коэффициенты римановой метрики (и их частные производные). *Геодезическая кривизна кривой на поверхности*, в отличие от нормальной, *также относится к внутренней геометрии поверхности.*

Дифференциальная геометрия
Листок 4
29 сентября 2015 г.

Вот способ вычислить гауссову кривизну по метрике, ничего не зная о вложении поверхности в трехмерное пространство. При помощи ортогонализации приведем ее к сумме квадратов, $g = u_1^2 + u_2^2$, где u_1 и u_2 — 1-формы. Определим 1-*форму связности* α равенствами

$$\alpha = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \qquad du_1 = \alpha_1\,\sigma, \quad du_2 = \alpha_2\,\sigma,$$

где $\sigma = u_1 \wedge u_2$ — форма площади. Тогда кривизна метрики определяется соотношением

$$d\alpha = -K\,\sigma.$$

Теорема. 1. *Ковариантная производная и кривизна K метрики, определенные выше, не зависят от выбора 1-форм u_1 и u_2.*
2. *В случае, когда метрика на поверхности задается вложением поверхности в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, K совпадает с гауссовой кривизной, а ковариантная производная – с касательной составляющей покомпонентной производной.*

1. Вычислите гауссову кривизну следующих метрик:
а) $dx^2 + \sin^2 x\, dy^2$;

б) $dx^2 + \operatorname{sh}^2 x\, dy^2$;

в) $dx^2 + x^2\, dy^2$;

г) $\dfrac{4\,(dx^2 + dy^2)}{(1 + k(x^2 + y^2))^2}$;

д) метрики, представленной в *конформном виде* $g(x, y)\,(dx^2 + dy^2)$, где $g(x, y) > 0$ — некоторая гладкая функция;

е) $dx^2 + 2\,\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$, где $\omega = \omega(x, y)$ — гладкая функция;

ё,ж,з,и) для индуцированной римановой метрики на поверхностях в $\mathbb{R}^3$ из задачи 6 Листка 3.

Теорема. *Риманова метрика на поверхности евклидова тогда и только тогда, когда её кривизна K тождественно обращается в ноль.*

Построение евклидовых координат сводится к построению ортонормированного репера ковариантно постоянных 1-форм. Пусть задан ортонормированный репер 1-форм u_1, u_2, и по нему построен новый репер $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ поворотом на угол ψ, зависящий от точки поверхности:

$$\tilde{u}_1 = \cos\psi\, u_1 + \sin\psi\, u_2, \qquad \tilde{u}_2 = -\sin\psi\, u_1 + \cos\psi\, u_2.$$

Тогда формы связности α и $\tilde{\alpha}$ для исходного и нового репера связаны соотношением

$$\tilde{\alpha} = \alpha + d\psi,$$

В частности, если $K \equiv 0$, то есть $d\alpha = 0$, то форма α является (локально) дифференциалом функции, то есть найдется функцияя ψ такая, что $\tilde{\alpha} = 0$. Для репера, повернутого на угол ψ выполняются равенства $d\tilde{u}_1 = d\tilde{u}_2 = 0$. Следовательно, $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ являются дифференциалами функций. Эти функции и служат искомыми евклидовыми координатами.

2. Докажите, что следующие метрики евклидовы. Найдите евклидовы координаты.

   а) $dx^2 + x^2\, dy^2$;

   б) $\dfrac{dx^2 + dy^2}{(x^2+y^2)^2}$;

   в) первая квадратичная форма на конусе $z^2 = x^2 + y^2$ в его гладких точках;

   г) $dx^2 + 2\,\cos(x+y)\, dx\, dy + dy^2$.

Дифференциальная геометрия
Листок 5
6 октября 2015 г.

Контрольная работа

Геликоидом называется поверхность, заметаемая лопастью пропеллера летящего самолета,

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = \varphi.$$

1. Докажите, что векторное поле $V = (x^2 - y^2)\,\partial_x + 2\,x\,y\,\partial_y + y\,\partial_z$ касается геликоида. Найдите выражение для ограничения поля V на геликоид в координатах (ρ, φ) указанной параметризации.
2. Определите риманову метрику и форму площади.
3. Найдите вторую квадратичную форму.
4. Найдите гауссову и среднюю кривизны.
5. Выберите ортонормированный базис 1-форм; вычислите формы связности и кривизны. Сравните вычисленную этим способом кривизну с гауссовой кривизной задачи 4.

Дифференциальная геометрия
Листок 6
Задачи письменного домашнего задания
20 октября 2014 г.

1. Рассмотрим центральную проекцию единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в евклидовом трехмерном пространстве из оси Oz вдоль горизонтальных плоскостей на поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ (это отображение часто используется в картографии). Сохраняет ли это отображение углы? Сохраняет ли оно площади?

2. Те же вопросы, что и в предыдущей задаче, про описанное ниже отображение *катеноида* на *геликоид*. Катеноид и геликоид — поверхности, заданные параметрически
$$x = \operatorname{ch} v \cos\varphi, \quad y = \operatorname{ch} v \sin\varphi, \quad z = v,$$
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = \varphi,$$
соответственно, а отображение сопоставляет точке с криволинейными координатами (v, φ) на катеноиде точку с координатами $\rho = \operatorname{sh} v$ и φ на геликоиде.

3. Пусть U — область $x^2+y^2 \le 1$ на поверхности $z = x\,y$ в трехмерном евклидовом пространстве. Вычислите площадь поверхности U а также площадь образа этой поверхности при отображении Гаусса и угол, на который поворачивается касательная плоскость при параллельном переносе вдоль края этой поверхности.

4. Пусть метрика на поверхности в некоторой точке имеет в локальных координатах разложение
$$g = dx^2 + dy^2 + A\,(x\,dy - y\,dx)^2 + \ldots,$$
где многоточие обозначает члены более высокого порядка малости (т.е. степени больше 2 по x и y). Найдите кривизну этой метрики в точке $x = y = 0$.

5. Пусть γ — гладкая замкнутая кривая на плоскости с кривизной $k(t)$, где t — натуральный параметр. Найдите площадь полоски, заметаемой нормальным вектором длины ε кривой, а также длину следа, оставляемого концом нормального вектора длины ε при движении точки вдоль кривой.

6. Пусть задана замкнутая выпуклая поверхность в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что объем тела, заметаемого нормальным вектором длины ε к этой поверхности, является многочленом от параметра ε. Выразите коэффициенты этого многочлена через дифференциально-геометрические характеристики поверхности. (Указание: параметризуйте тело и выразите евклидову метрику в выбранной параметризации через метрику на исходной поверхности).

Дифференциальная геометрия
Листок 7
3 ноября 2015 г.

Пусть ∇ – связность в $T\mathbb{R}^n$, задаваемая покоординатным дифференцированием векторных полей, рассматриваемых как вектор-функции.

1. Для $n = 2$, найдите производную $\nabla_u v$, где $u = u^1\partial_\rho + u^2\partial_\varphi$ и $v = v^1\partial_\rho + v^2\partial_\varphi$, в полярных координатах на плоскости. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля в этих координатах.

   Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность. Определим связность в TM следующим образом: ковариантная производная векторного поля задается композицией его покоординатной производной как трехкомпонентной вектор-функции с последующей ортогональной проекцией на касательную плоскость.

2. Для случая, когда M — единичная сфера, найдите производную $\nabla_u v$ для $u = u^1\partial_\varphi + u^2\partial_\psi$, $v = v^1\partial_\varphi + v^2\partial_\psi$, в сферических координатах. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля в этих координатах.

   Пусть M — риманова поверхность. *Риманова связность* в TM задается формулами $\nabla_\xi e_1 = \alpha(\xi)\ e_2$, $\nabla_\xi e_2 = -\alpha(\xi)\ e_1$, где e_1 и e_2 — ортонормированный базис касательных векторных полей и α — 1-форма связности из алгоритма вычисления кривизны.

3. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля римановой связности в координатах (x, y) для метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$, где $\omega(x, y)$ — некоторая функция.

   Связность ∇ в расслоении E определяет естественную связность ∇^* в двойственном расслоении E^* условием

$$\partial_\xi(u, s) = (\nabla^*_\xi u, s) + (u, \nabla_\xi s),$$

   где u и s — сечения расслоений E^* и E соответственно. Аналогично, связности ∇^E и ∇^F в расслоениях E и F определяют связность в расслоении $E \otimes F$ условием

$$\nabla_\xi e \otimes f = (\nabla^E_\xi e) \otimes f + e \otimes (\nabla^F_\xi f).$$

4. Как связаны между собой матрицы связности в некотором расслоении и ассоциированной связности в двойственном расслоении в двойственных базисах?

5. Выразите через символы Кристоффеля ковариантную производную $\nabla_k g_{i,j}$ римановой метрики, рассматриваемой как сечение расслоения $(T^*M)^{\otimes 2}$.

Дифференциальная геометрия
Листок 8
10 ноября 2015 г.

Кривизна связности — линейное преобразование R, действующее в слоях расслоения и зависящее билинейным и кососимметричным образом от пары касательных векторов на базе. Вот различные его эквивалентные интерпретации:
1) *Действие на сечениях*:

$$R(\xi,\eta) = \nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}$$

2) *Представление в тривиализации* как матрица 2-форм (*структурное уравнение Картана*):

$$R = dA + A\wedge A.$$

3) *Координатное представление*

$$R(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell})^i_j = R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{j\ell} - \Gamma^i_{m\ell}\Gamma^m_{jk}.$$

4) Как *инфинитезимальная голономия*: параллельный перенос слоев расслоения по периметру параллелограмма со сторонами $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta$ равен

$$\mathrm{Id} - \varepsilon^2 R(\xi,\eta) + o(\varepsilon^2).$$

1. Докажите, что действующий на сечения оператор определения 1) коммутирует с умножением на функции, и, тем самым, действительно определяет линейное преобразование слоев расслоения.
2. Вычислите кривизну (т.е. матрицу R 2-форм и коэффициенты R^i_{jkl}) связностей задач 1,2,3 предыдущего листка.

Теорема. *Если R — матрица кривизны римановой связности на поверхности* (см. задачу 3 предыдущего листка)*, то матрица gR кососимметрическая. Кривизна метрики выражается через* $(1,2)$*-компоненту $R_{1212}\,dx^1\wedge dx^2$ матрицы gR по формуле*

$$K = \frac{R_{1212}}{\det g}.$$

3. Проверьте равенство теоремы для метрик задач 1,2,3 предыдущего листка.

Пусть M — поверхность в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим связность в тривиальном расслоении $M \times \mathbb{R}^3 \to M$ задаваемую покоординатным дифференцированием сечений, рассматриваемых как трехкомпонентные вектор-функции. Кривизна этой связности равна, очевидно, нулю.

4. Пользуясь деривационными формулами, запишите матрицу этой связности в базисе, состоящем из ортонормированных касательных полей e_1, e_2 и единичного нормального вектора $e_3 = n$ поверхности. Вычислите матрицу кривизны этой связности и приравняйте ее нулю. Выпишите получившиеся уравнения (они называются *уравнениями Майнарди-Петерсона-Кодацци*; они выражают необходимые и достаточные условия того, что данная пара квадратичных форм на поверхности реализуется локально как первая и вторая форма некоторого вложения в $\mathbb{R}^3$).

Дифференциальная геометрия
Листок 9
17 ноября 2015 г.

Теорема. *Связность плоская тогда и только когда, когда ее кривизна тождественно равна нулю.*

1. Пусть связность в расслоении ранга 1 на плоскости задана (1×1) матрицей 1-форм а) $A = (y\,dx - x\,dy)$ и б) $A = (y\,dx + x\,dy)$. Найдите ковариантно постоянное продолжение сечения $s(0,0) = 1$ в начале координат в точку $(1,1)$ вдоль следующих кривых: прямолинейного отрезка; ломаной $(0,0)$—$(1,0)$—$(1,1)$; ломаной $(0,0)$—$(0,1)$—$(1,1)$.

2. Докажите, что связность в расслоении ранга 3 над двумерной базой с координатами (x, y) и следующей матрицей 1-форм плоская. Найдите базис ковариантно постоянных сечений.

$$A = \begin{pmatrix} -dy & dx - x\,dy & xy\,dx - x\,dy \\ 0 & 0 & -y\,dx + dy \\ 0 & 0 & dx \end{pmatrix}$$

3. Пусть A — матрица связности задачи 1 листка 7 (в полярных координатах на плоскости). Напишите условие ковариантной постоянности сечений. Постройте базис ковариантно постоянных сечений и докажите, тем самым, что эта связность плоская.

4. Сечения тривиального расслоения со слоем $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ над проколотой плоскостью $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ могут рассматриваться как комплекснозначные фукнции. Введем связность в этом расслоении формулой

$$\nabla_\xi u = \partial_\xi u + a\frac{\xi_1 + i\xi_2}{x_1 + ix_2}u,$$

где $\xi = \xi_1\partial_{x_1} + \xi_2\partial_{x_2}$ и $a \in \mathbb{C}$ — константа. Плоская ли эта связность? Найдите параллельное преобразование, задаваемое этой связностью вдоль окружности радиуса 2 с центром в точке $(0,1)$.

Дифференциальная геометрия

Операции над сечениями тензорных расслоений и их координатное представление

Тензор $T = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\partial_{x^{i_1}}\otimes\dots\otimes dx^{j_q}$, т.е. сечение тензорного расслоения $(TM)^{\otimes p}\otimes(T^*M)^{\otimes q}$	Набор n^{p+q} функций $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x)$
Его представление в новом базисе $T = \overline{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\partial_{y^{i_1}}\otimes\dots\otimes dy^{j_q}$	Правила замены координат $\overline{T}^{k_1\dots k_p}_{l_1\dots l_q}=T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}$
Изоморфизм перестановки $T^{\otimes 2}M\to T^{\otimes 2}M\colon\ u\otimes v\mapsto v\otimes u$	Операция перестановки индексов $T^{ij}\mapsto T^{ji}$
Риманова структура $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$	Симметрическая положительно определенная матрица g_{ij}. Матрица g^{ij} — ей обратная: $g_{ij}g^{jk}=\delta^k_i$
Изоморфизм $T_xM\to T^*_xM\colon\ v\mapsto g_x(v,\cdot)$ и его продолжение на тензоры более высоких рангов	Операции (взаимно обратные) поднятия и опускания индексов $T^{iI}_J\mapsto\overline{T}^I_{jJ}=g_{ij}T^{iI}_J$ и $T^I_{jJ}\mapsto\overline{T}^{iI}_J=g^{ij}T^I_{jJ}$
След оператора $f\in\mathrm{Hom}(TM,TM)\cong T^*M\otimes TM$, $u\otimes a\mapsto u(a)$	Операция свертки $T^i_j\mapsto T^i_i$
и его обобщение $T^*M\otimes TM\otimes E\to E\colon\ u\otimes a\otimes w\mapsto u(a)\,w$	$T^{iI}_{jJ}\mapsto\overline{T}^I_J=T^{iI}_{iJ}$
Матрица связности A из 1-форм, ее компоненты $\alpha^i_j=\Gamma^i_{jk}\,dx^k$	Символы Кристоффеля Γ^i_{jk}
Ковариантная производная $\nabla s=ds+A\,s$, или $\nabla_\xi s^ie_i=(\partial_\xi s^i+\alpha^i_j(\xi)\,s^j)\,e_i$ $d(u,v)=(\nabla u,v)+(u,\nabla v)$, $\nabla u\otimes v=(\nabla u)\otimes v+u\otimes(\nabla v)$	$\nabla_kT^i=\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}T^j$, $\nabla_kT_j=\frac{\partial T_j}{\partial x^k}-\Gamma^i_{jk}T_i$, $\nabla_kT^I_J=\frac{\partial T^I_J}{\partial x^k}-T^I_{jj_2\dots j_q}\Gamma^j_{j_1k}-\dots-T^I_{j_1\dots j_{q-1}j}\Gamma^j_{j_qk}+$ $T^{ii_2\dots i_p}_J\Gamma^{i_1}_{ik}+\dots+T^{i_1\dots i_{p-1}i}_J\Gamma^{i_p}_{ik}$
Матрица связности в другой тривиализации $e'_i=b^j_ie_j$, $A'=b^{-1}db+b^{-1}Ab$	Преобразование символов Кристоффеля при заменах координат $x^i\rightsquigarrow y^{i'}$, $\Gamma^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i}(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial y^{k'}}+\frac{\partial^2x^i}{\partial y^{j'}\partial y^{k'}})$
Связность Леви-Чивиты на TM $gA=\frac12\|dg_{ij}-\partial_ig_j+\partial_jg_i\|$ $(g_i=g_{ik}dx^k)$	$\Gamma^i_{jk}=\frac12g^{il}(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j})$
Тензор кручения $T(\xi,\eta)=\nabla_\xi\eta-\nabla_\eta\xi-[\xi,\eta]$	$T^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{jk}$
Тензор кривизны $R=dA+A\wedge A=R^i_{jkl}dx^k\otimes dx^l$ $R(\xi,\eta)=\nabla_\xi\nabla_\eta-\nabla_\eta\nabla_\xi-\nabla_{[\xi,\eta]}$	$R^i_{jkl}=\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl}-\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}$ $R(\xi,\eta)=R^i_{jkl}\xi^k\eta^l$

Дифференциальная геометрия
Листок 10
24 ноября 2015 г.

Если слои расслоении E снабжены скалярным произведением, то его структурная группа редуцируется к $O(n)$, $n = \mathrm{rk}E$. Связность называется *согласованной с метрикой*, если она является связностью в ассоциированном $O(n)$-расслоении..
Связность в касательном расслоении называется *симметричной*, если для произвольных двух векторных полей выполняется равенство $\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta]$.

Теорема. *В касательном расслоении к риманову многообразию имеется естественная связность (называемая* связностью Леви-Чивиты*), однозначно определяемая двумя требованиями: 1) согласованность с римановой структурой и 2) симметричность.*
Символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты (в базисе координатных векторных полей) задаются равенствами

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is} \Big(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} \Big).$$

Эквивалентным образом, матрица A связности Леви-Чивиты находится из соотношения

$$gA = \frac{1}{2}(dg + s), \qquad s_{ij} = -\partial_i g_j + \partial_j g_i,$$

(слагаемые в скобках описывают симметричную и кососимметричную компоненты матрицы), где $g_i = g(\partial_{x_i}, \cdot)$ — 1-форма, двойственная i-му координатному векторному полю; ее компоненты образованы i-м столбцом (или строкой) матрицы g, а ∂_i — покомпонентная производная соответствующих 1-форм.

1. Докажите эквивалентность следующих условий согласованности с метрикой:
— индуцированная связность в двойственном расслоении E^* совпадает с исходной при отождествлении E и E^*, задаваемом метрикой;
— для произвольных двух сечений u, v и векторного поля ξ выполняется равенство
$$\partial_\xi(u, v) = (\nabla_\xi u, v) + (u, \nabla_\xi v);$$
— матрица связности кососимметрична *в ортонормированном базисе*;
— параллельный перенос является ортогональным преобразованием (т.е. сохраняет скалярное произведение).

2. Докажите, что условие симметричности метрики $\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta]$ равносильно симметрии символов Кристоффеля $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ в *базисе координатных векторных полей.*

3. Докажите, что из ковариантной постоянности 1-формы симметричной связности вытекает ее замкнутость.

4. Докажите, что для случая двумерной римановой поверхности связность Леви-Чивиты в касательном расслоении совпадает с римановой связностью, введенной в листке 7.

   Теорема. *Если R — матрица кривизны римановой связности на поверхности* (см. предыдущую задачу)*, то матрица gR кососимметрическая. Кривизна метрики выражается через $(1,2)$-компоненту $R_{1212}\,dx^1\wedge dx^2$ матрицы gR по формуле*

$$K = \frac{R_{1212}}{\det g}.$$

5. Действуя в базисе координатных векторных полей, вычислите связность Леви-Чивиты (т.е. символы Кристоффеля или матрицу 1-форм), а также кривизну (при помощи формулы приведенной выше теоремы) и убедитесь, тем самым, в справедливости теоремы для следующих метрик:
   а) евклидовой метрики на плоскости в полярных координатах;
   б) метрики на единичной сфере в сферических координатах;
   в) метрики на псевдосфере в псевдосферических координатах;
   г) метрики на параболоиде вращения в евклидовом пространстве;
   д) для метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega\,dx\,dy + dy^2$, где $\omega(x,y)$ — произвольная гладкая функция.

Дифференциальная геометрия
Задачи письменного экзамена
15 декабря 2015 г.

1. Докажите, что на трехмерном римановом многообразии тензор кривизны однозначно определяется тензором Риччи.

2. Докажите, что метрика $e^{2x}\,(y^2dx^2 + dy^2)$ (в области $y > 0$ плоскости координат x, y) плоская. Найдите ковариантно постоянные 1-формы и евклидовы координаты.

3. Выпишите условия симметричности и согласованности с метрикой для связности на римановом многообразии в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ векторных полей. Выразите коэффициенты Γ^i_{jk}, связности Леви-Чивиты в этом базисе, $\nabla_{e_k} e_j = \Gamma^i_{jk} e_i$, через коэффициенты α^k_{ij} попарных коммутаторов $[e_i, e_j] = \alpha^k_{ij} e_k$.

4. (Псевдо)риманова метрика и связность в касательном расслоении пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами $x = u_1$, $y = u_2$, $z = u_3$ задаются в базисе координатных векторных полей соотношениями

$$(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_1 \partial u_i \partial u_j}, \qquad \Gamma_{ijk} = (\nabla_{\partial_{u_k}} \partial_{u_j}, \partial_{u_i}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k},$$

где

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 z + x\, y^2) + a\, y^2 z^2 + \frac{1}{120} z^5.$$

При каких значениях параметра a связность плоская? При каких значениях она симметричная? При каких согласована с метрикой?

5а. Пусть система локальных координат (x, y) на римановой поверхности обладает тем свойством, что базис ∂_x, ∂_y является ортонормированным в начале координат, и лучи $x = k\,t,\ y = \ell\, t$ являются геодезическими для любых значений констант k и ℓ. Найдите разложение Тейлора до членов порядка 2 коэффициентов $a(x, y),\ b(x, y),\ c(x, y)$ метрики $g = a\, dx^2 + 2\, b\, dx\, dy + c\, dy^2$ на этой поверхности.

5б. Докажите, что площадь $S = S(\varepsilon)$ диска радиуса ε и длина $\ell = \ell(\varepsilon)$ его границы на римановой поверхности имеют вид

$$S = \pi\, \varepsilon^2 + A\, \varepsilon^4 + o(\varepsilon^4), \qquad \ell = 2\, \pi\, \varepsilon + B\, \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3).$$

Выразите константы A и B через гауссову кривизну в центре диска.