Алгебра-2 (матфак ВШЭ 2015-2016): расширения полей, листок 2

Срок сдачи листка 26 февраля (просроченная задача оценивается как ползадачи, сданные в срок).

1 Сформулируйте и докажите теорему о продолжении гомоморфизмов в алгебраически замкнутое поле.

2 Найдите степень поля разложения X^5-7 над $\mathbb{Q}$ и $(X^2-3)(X^3-2)$ над $\mathbb{Q}$.

3 Найдите степень поля разложения X^6+X^3+1 над $\mathbb{F}_p, p\equiv 1(9)$; над $\mathbb{F}_p, p\equiv 7(9)$; над $\mathbb{F}_p, p\equiv 2(9)$.

4 Пусть K поле характеристики p и a алгебраичен над K. Покажите, что a сепарабелен тогда и только тогда, когда $K(a)=K(a^{p^n})$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Поле характеристики p называется совершенным, если все его элементы - p-е степени. Например, конечные поля совершенны (почему?). Все расширения совершенного поля сепарабельны.

5 а) Пусть k алгебраически замкнутое поле характеристики p, и $K=k(T)$. Обозначим u_n корень многочлена $X^{p^n}-T$ в $\overline{K}$, и пусть $K_n=K(u_n)$.

Какова степень K_n над K? Покажите, что $K_n=(K_{n+1})^p$ (здесь L^p обозначает подполе p-х степеней в L).

б) Выведите отсюда, что $K(u_1,...u_n,....)$ совершенное поле, и что все конечные чисто несепарабельные расширения K - это K_n.

6 Какие из следующих алгебр являются полями? произведениями полей? опишите эти поля.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

7 Тот же вопрос для $\mathbb{F}_2(\sqrt{T})\otimes_{\mathbb{F}_2(T)}\mathbb{F}_2(\sqrt{T})$, $\mathbb{F}_4(\sqrt[3]{T})\otimes_{\mathbb{F}_4(T)}\mathbb{F}_4(\sqrt[3]{T})$.

Расширение L поля K называется нормальным, если это поле разложения семейства многочленов над K, и расширением Галуа, если оно нормально и сепарабельно. В этом случае группа автоморфизмов L над K называется группой Галуа.

8 Пусть $a=\sqrt[4]{5}$. Покажите, что $\mathbb{Q}(ia^2)$ нормально над $\mathbb{Q}$, что $\mathbb{Q}(a+ia)$ нормально над $\mathbb{Q}(ia^2)$, но $\mathbb{Q}(a+ia)$ не является нормальным над $\mathbb{Q}$.

9 Покажите, что $cos(\frac{2\pi}{9})$ алгебраичен над $\mathbb{Q}$, и что $\mathbb{Q}(cos(\frac{2\pi}{9}))$ – нормальное расширение $\mathbb{Q}$.

10 а) Пусть группа G транзитивно действует на множестве из p элементов, где p простое число. Докажите, что образ G в группе подстановок S_p содержит p-цикл.

б) Выведите отсюда, что группа Галуа поля разложения неприводимого многочлена $P\in\mathbb{Q}[X]$ простой степени p, у которого ровно $p-2$ вещественных корня, есть S_p.

11 Пусть $S\subset F(X_1,...,X_n)$ поле симметрических рациональных функций от n переменных с коэффициентами в поле F. Покажите, что $F(X_1,...,X_n)$ – расширение Галуа поля S, степени $n!$.