Алгебра — II

Листок 4

Представления симметрических групп.

Срок сдачи 18 декабря.

Условимся называть *тавтологическим* n-мерное представление симметрической группы S_n в пространстве $\mathbb{C}^n$, при котором переставляются базисные векторы стандартного базиса. Тавтологическое представление является прямой суммой тривиального одномерного представления и $(n-1)$-мерного представления группой (несобственных) движений стандартного правильного $(n-1)$-мерного симплекса. Это последнее представление мы будем называть *симплициальным*.

(1) Докажите, что симплициальное представление симметрической группы неприводимо, и вычислите его характер.

(2) Вычислите скалярный квадрат (относительно стандартной эрмитовой структуры на $\mathbb{C}[S_n]$) характера k-той внешней степени тавтологического представления симметрической группы а) S_4; б) S_n.

(3) Выведите из предыдущей задачи, что все внешние степени симплициального представления симметрической группы неприводимы (для этого разложите внешнюю степень тавтологического представления в сумму подходящих внешних степеней симплициального представления).

(4) Обозначим через $\mathrm{Sym}_k : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$ (соответственно, $\mathrm{Alt}_k : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$) оператор симметризации (соответственно, антисимметризации). Укажите явно такой ненулевой тензор $\tau \in V^{\otimes 3}$, для которого

$$\mathrm{Sym}_3(\tau) = \mathrm{Alt}_3(\tau) = 0.$$

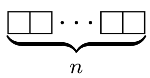
(5) С каждой таблицей Юнга, построенной по диаграмме Юнга λ, свяжем следующие три элемента групповой алгебры $\mathbb{C}S_n$:

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in R} \sigma, \qquad b_\lambda = \sum_{\sigma \in C} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma, \qquad c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda$$

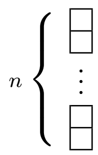
где $R, C \subseteq G$ — подгруппы, сохраняющие соответственно строки и столбцы выбранной таблицы Юнга. Элемент c_λ называется *симметризатором Юнга*. Обозначим через V_λ левый идеал, порожденный c_λ в $\mathbb{C}S_n$. Докажите, что V_λ — единственный (с точностью до изоморфизма) простой $\mathbb{C}S_n$-модуль, входящий как в $\mathrm{Ind}_R^{S_n} \mathbb{C}_1$, так и в $\mathrm{Ind}_C^{S_n} \mathbb{C}_\varepsilon$, где $\mathbb{C}_1$ — тривиальный одномерный $\mathbb{C}R$-модуль, а $\mathbb{C}_\varepsilon$ — знакопеременный одномерный $\mathbb{C}C$-модуль.

Процедура построения по диаграмме Юнга λ неприводимого представления группы S_n в пространстве V_λ (соответствующего естественной структуре $\mathbb{C}S_n$-модуля на V_λ) называется *конструкцией Шура*.

(6) Докажите, что одномерные тривиальное и знакопеременное представления симметрической группы получаются применением конструкции Шура к диаграммам



и

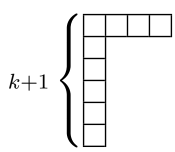


соответственно.

(7) Докажите, что при применении конструкции Шура к транспонированным диаграммам Юнга получатся представления, отличающиеся друг от друга тензорным умножением на одномерное знакопеременное представление.

(8) Установите соответствие между представлениями Шура групп S_3 и S_4 и неприводимыми представлениями этих групп, описанными геометрически в задачах из прошлых листков.

(9) Докажите, что k-тая внешняя степень симплициального представления симметрической группы получается применением конструкции Шура к диаграмме-крюку



.