Алгебра — II

Листок 3

Характеры.

Срок сдачи задач с 1 по 7 — 30 ноября.

1. Докажите, что представление конечной группы изоморфно своему сопряженному тогда и только тогда, когда все значения его характера вещественны.

2. Докажите, что для любого элемента g неединичной конечной группы G существует такой нетривиальный неприводимый комплексный характер χ группы G, что $\chi(g) \neq 0$.

3. Пусть ε — одномерное представление группы S_4, в котором каждая перестановка действует умножением на свой знак, ρ — ее представление вращениями куба, а τ — ее представление симметриями тетраэдра. Докажите, что $\rho \otimes \varepsilon \simeq \tau$ и $\tau \otimes \varepsilon \simeq \rho$.

4. Разложите на неприводимые представление S_4 в пространстве функций на ребрах тетраэдра.

5. Пусть ρ — неприводимое двумерное представление группы S_3.

   (a) Разложите $S^2\rho$ и $S^3\rho$ в прямую сумму неприводимых представлений.

   (b) Докажите, что $S^{n+6}\rho \simeq S^n\rho \oplus \varkappa$, где через $\varkappa$ обозначено регулярное представление группы G, а $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Опишите разложение $S^n\rho$ в прямую сумму неприводимых для любого $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Опишите алгебру всех G-инвариантных полиномов на V, где V — пространство представления ρ.

6. Пусть G — конечная группа, $H \subset G$ — подгруппа (не обязательно нормальная), $X = G/H$ — множество левых смежных классов, на котором группа G действует левыми умножениями. Докажите, что характер представления группы G в пространстве $\mathbb{C}X$ вычисляется по формуле:
$$\chi(C) = \frac{|G| \cdot |C \cap H|}{|C| \cdot |H|},$$
где C — класс сопряженных элементов группы G. (Напомним, что такие представления называются квазирегулярными.)

7. Пусть пересечение класса сопряженных элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в дизъюнктное объединение $C \cap H = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_s$ классов H-сопряженности. Докажите, что значение на C характера представления группы G, индуцированного с произвольного представления ρ подгруппы H, вычисляется по формуле:
$$\chi_{\operatorname{Ind}\rho}(C) = \frac{|G|}{|C| \cdot |H|} \sum_{i=1}^{s} |D_i| \cdot \chi_\rho(D_i).$$

8*. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ — точное представление конечной группы G (то есть $G \simeq \rho(G)$). Докажите, что в разложениях его тензорных степеней встречаются все неприводимые представления группы G.