Алгебра — II

Листок 2

Представления.

Срок сдачи задач 1–8 — 6 ноября.

1. Какие собственные значения могут иметь операторы представления группы движений треугольника D_3?

2. Как действует оператор, представляющий симметрию треугольника, на собственных подпространствах оператора, представляющего поворот?

3. Докажите, что группа D_3 имеет всего три неприводимых комплексных представления: два одномерных и одно двумерное.

4. Классифицируйте простые модули над ассоциативной алгеброй A, где

   (a) $A = \mathbb{C}[x]/(x^2 - 3x + 2)$;

   (b) $A = \mathbb{C}[x]/(x^2 - 2x + 1)$.

5. Является ли полупростым любой конечномерный модуль над алгеброй A из предыдущей задачи?

6. Найдите все такие группы G, для которых $\mathbb{C}G = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ (прямая сумма алгебр).

7. Перечислите все (с точностью до изоморфизма) конечные группы G, для которых групповая алгебра $\mathbb{C}G$ изоморфна

   (a) прямой сумме двух матричных алгебр;

   (b) прямой сумме трех матричных алгебр.

8. Пусть $V = \mathbb{C}^2$ и (e_1, e_2) — стандартный базис V. Рассмотрим в тензорной алгебре $T(V)$ двусторонний идеал I, порожденный $(e_1 \otimes e_1)$, $(e_2 \otimes e_2)$ и $(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - 1)$. Обозначим через C факторалгебру $T(V)/I$.

   (a) Чему равна размерность алгебры C?

   (b) Пусть $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Докажите, что существует матричное представление алгебры C, переводящее e_1 в X, а e_2 в Y. Является ли оно неприводимым?

   (c) Перечислите все (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления алгебры C.

9. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, а q — квадратичная форма на V. *Алгеброй Клиффорда* $C(q)$ называется факторалгебра тензорной алгебры пространства V по двустороннему идеалу, порожденному элементами вида $v \otimes v - q(v)$. Чему равна размерность $C(q)$?

10. Пусть $V = W^* \oplus W$ и q — квадратичная форма на V, заданная формулой $q((\varphi, w)) = \varphi(w)$. Положим $M = \Lambda(W)$.

    (a) Докажите, что существует неприводимое представление алгебры Клиффорда $C(q)$ в пространстве M, переводящее $(\varphi, 0) \in V$ в оператор внутреннего умножения на $\varphi \in W^*$, а $(0, w)$ — в оператор внешнего умножения на $w \in W$.

    (b) Докажите, что любое неприводимое представление алгебры $C(q)$ эквивалентно этому представлению.