

Алгебра — II

Листок 1' (дополнительный)

Автоморфизмы симметрических групп.

1. (a) Опишите классы сопряженности в знакопеременной группе A_n .
(b) Докажите, что при $n \geq 5$ группа A_n проста.
2. (a) Докажите, что любой автоморфизм группы переводит классы сопряженности в классы сопряженности.
(b) Докажите, что если автоморфизм симметрической группы S_n переводит транспозиции в транспозиции, то он является внутренним.
(c) Докажите, что при $n \neq 6$ все автоморфизмы группы S_n являются внутренними.
3. (a) Пусть H — подгруппа индекса 6 в S_6 . Тогда действие S_6 на множестве смежных классов S_6/H задает гомоморфизм $S_6 \rightarrow S_6$. Докажите, что это автоморфизм.
(b) Докажите, что любая подгруппа индекса 6 в S_6 изоморфна S_5 .
4. Напомним, что для любого поля \mathbb{k} группа $PGL_n(\mathbb{k})$ определяется как факторгруппа группы $GL_n(\mathbb{k})$ по подгруппе скалярных матриц.
(a) Докажите, что действие группы $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ на $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ задает вложение этой группы в S_6 .
(b) Обозначим через H образ этого вложения. Докажите, что H — подгруппа индекса 6 в S_6 .
(c) Рассмотрим S_5 как подгруппу в S_6 , состоящую из всех перестановок, оставляющих элемент 6 на месте. Опишите все подгруппы в S_6 , сопряженные с ней, и докажите, что подгруппа H не сопряжена с S_5 .
(d) Докажите, что автоморфизм группы S_6 , задаваемый по предыдущей задаче подгруппой H , не является внутренним.
(e) Куда этот автоморфизм переводит транспозиции?
5. (a) Докажите, что факторгруппа $\text{Aut}(S_6)/\text{Int}(S_6)$ группы всех автоморфизмов группы S_6 по подгруппе ее внутренних автоморфизмов изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(b) Верно ли, что $\text{Aut}(S_6) \cong \text{Int}(S_6) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?