Алгебра — II

Листок 1

Группы.

Срок сдачи задач 1–9 — 26 сентября.

1. Докажите, что любая подгруппа, содержащая коммутант группы, нормальна.

2. Докажите, что центр группы порядка p^n содержит более одного элемента (p — простое число, $n \in \mathbb{N}$).

3. Существуют ли неабелевы группы порядка p^2?

4. Пусть G — группа верхних унитреугольных матриц порядка 3 с элементами из поля $\mathbb{F}_3$. Найдите порядок группы G, ее центр и классы сопряженных элементов.

5. Может ли быть циклической
   (a) факторгруппа некоммутативной группы по ее центру?
   (b) группа всех автоморфизмов некоммутативной группы?

6. Сколько силовских p-подгрупп в (a) $GL_2(\mathbb{F}_p)$? (b) $GL_n(\mathbb{F}_p)$?

7. Найдите коммутанты групп (a) S_3; (b) A_4; (c) D_4; (d) S_4; (e) Q_8 (группа Гамильтона); (f) D_5.

8. (a) Докажите, что коммутант любой нормальной подгруппы группы G является нормальной подгруппой группы G.
   (b) Верно ли, что любая нормальная подгруппа коммутанта группы G является нормальной подгруппой группы G?

9. Пусть p, q — простые числа, $p < q$.
   (a) Докажите, что если p не делит $q - 1$, то любая группа порядка pq — абелева. Сколько их (с точностью до изоморфизма)?
   (b) Докажите, что если p делит $q - 1$, то существует неабелева группа порядка pq. Сколько их (с точностью до изоморфизма)?

10. Докажите разрешимость любой группы порядка
   (a) p^n, где p — простое число, $n \in \mathbb{N}$;
   (b) pq, где p, q — различные простые числа;
   (c) p^2q, где p, q — различные простые числа;
   (d) $n < 60$.

11. Пусть порядок группы G равен 60.
   (a) Докажите, что если число силовских 2-подгрупп в группе G не равно 5, то группа G разрешима.
   (b) Докажите, что если группа G проста, то она изоморфна группе A_5.