Программа коллоквиума

Определения:

Внутренние и внешние автоморфизмы группы, центр группы, коммутант группы, полупрямое произведение групп, нормальный ряд, композиционный ряд, разрешимая группа, простая группа, p-группа, силовская подгруппа конечной группы, линейные представления группы, инвариантные подпространства, подпредставления и факторпредставления, двойственное представление, неприводимые представления, вполне приводимые представления, левые и правые модули над ассоциативной алгеброй, простые модули, полупростые модули, групповая алгебра конечной группы, характер представления.

Формулировки:

Теорема об изоморфизме, теорема о соответствии, теоремы Силова, теорема Машке, лемма Шура, теорема о двойном централизаторе (теорема плотности), соотношение ортогональности для характеров.

Теоретические вопросы:

1. Докажите теорему об изоморфизме.
2. Докажите теорему о соответствии.
3. Докажите что в любой конечной группе для любого простого p существует силовская p-подгруппа.
4. Докажите, что любая p-подгруппа конечной группы содержится в некоторой силовской, причем все силовские p-подгруппы сопряжены.
5. Докажите, что число силовских p-подгрупп сравнимо с 1 по модулю p.
6. Докажите, что знакопеременная группа A_5 проста.
7. Докажите теорему Машке.
8. Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{k}$, и пусть V — левый A-модуль, конечномерный над $\mathbb{k}$. Докажите, что модуль V полупрост тогда и только тогда, когда его можно разложить в сумму простых подмодулей.
9. Докажите лемму Шура.
10. Пусть A — конечномерная полупростая алгебра над алгебраически замкнутым полем. Докажите, что A изоморфна прямой сумме матричных алгебр над этим полем.
11. Докажите, что число неприводимых комплексных представлений конечной группы равно числу классов сопряженности, а сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна порядку группы.
12. Докажите, что характеры неприводимых представлений образуют ортонормированный базис в пространстве центральных функций.