Независимый Московский Университет

Алгебра – II

Второй курс, осенний семестр 1995/96 г.
Лекции 4–6

Линейные представления и модули

Определение 1. Пусть G — группа. *Линейным представлением* группы G в пространстве V называется такое отображение $\rho : G \to \operatorname{End}_{\Bbbk} V$, что $\rho(e) = \mathrm{id}_V$ и $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ для любых $g, h \in G$. Другими словами, линейное представление группы G в пространстве V — это гомоморфизм ее в группу $GL(V)$ обратимых линейных операторов в пространстве V.

Определение 2. Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей. *Линейным представлением* алгебры A в пространстве V называется такое отображение $\rho : A \to \operatorname{End}_{\Bbbk} V$, что $\rho(1) = \mathrm{id}_V$, $\rho(xa) = x\rho(a)$, $\rho(a+b) = \rho(a) + \rho(b)$ и $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ для любого $x \in \Bbbk$ и для любых $a, b \in A$. Другими словами, линейное представление ассоциативной алгебры с единицей A в пространстве V — это гомоморфизм ее в ассоциативную алгебру с единицей $\operatorname{End}_{\Bbbk} V$ всех линейных операторов в пространстве V (под гомоморфизмом алгебр с единицей мы понимаем гомоморфизм алгебр, переводящий единицу в единицу).

Вместо слов "линейное представление" мы будем обычно говорить просто "представление", другие (не линейные) представления нам не встретятся.

Определение 3. Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над полем $\Bbbk$. *Левым A-модулем* называется векторное пространство V над полем $\Bbbk$, снабженное операцией *левого умножения* на элементы алгебры A, причем требуется выполнение следующих условий:

1. $1v = v$ для любого $v \in V$;
2. отображение $A \times V \to V$, переводящее всякую пару (a, v) в av, билинейно;
3. $(ab)v = a(bv)$ для любых $a, b \in A$, $v \in V$.

Аналогично определяется понятие *правого A-модуля*.

Ясно, что понятия левого A-модуля и представления алгебры A тесно связаны: если задано представление $\rho : A \to \operatorname{End}_{\Bbbk} V$, то V получает естественную структуру левого A-модуля (произведение av определяется как $\rho(a)v$); наоборот, если векторное пространство V является левым A-модулем, то тем самым задается представление алгебры A в пространстве V (по определению полагаем $\rho(a)v = av$).

Основные свойства представлений одни и те же для групп и ассоциативных алгебр; мы разберем их для алгебр. В основном я буду пользоваться языком модулей, отмечая, как переводятся те или другие утверждения на язык представлений.

Далее буква A обозначает ассоциативную алгебру с единицей над полем $\Bbbk$. Всё сказанное о левых A-модулях буквально переносится на правые A-модули.

Все векторные пространства (в том числе алгебры и модули над ними) будут предполагаться конечномерными (если не оговорено противное).

Определение 4. Пусть V — левый A-модуль. *Подмодулем* модуля V называется любое подпространство $U \subseteq V$, замкнутое относительно умножения на все элементы алгебры A. Если U — подмодуль левого A-модуля V, то факторпространство V/U наделяется естественной структурой левого A-модуля (полагаем $a(v + U) = av + U$ для любго $a \in A$ и любого смежного класса $a + U \in V/U$; корректность этого определения следует из замкнутости U относительно умножения на элементы кольца A). Модуль V/U называется *фактормодулем* модуля V по подмодулю U.

На языке представлений подмодуль называется *инвариантным подпространством*, представление в инвариантном подпространстве называется *подпредставлением*, а представление в факторпространстве называется *факторпредставлением* исходного представления.

Определение 5. Пусть V, W — левые A-модули. *Гомоморфизмом* модуля V в модуль W называется любое линейное отображение $F : V \to W$, удовлетворяющее условию $F(av) = aF(v)$ для любых $a \in A$ и $v \in V$. *Изоморфизмом* называется обратимый гомоморфизм. Если существует изоморфизм $F : V \to W$, то модули V и W называются *изоморфными*.

На языке представлений гомоморфизмы модулей называются *морфизмами представлений* или *сплетающими операторами*, а представления в изоморфных модулях тоже называются изоморфными или *эквивалентными*.

Понятия внешней прямой суммы и внутренней прямой суммы автоматически переносятся с векторных пространств на модули (и на представления).

Определение 6. Левый A-модуль V называется *простым*, если он ненулевой и у него нет нетривиальных подмодулей (то есть подмодулей, отличных от 0 и V). Левый A-модуль V называется *полупростым*, если всякий подмодуль $U \subseteq V$ является прямым слагаемым (то есть существует подмодуль $W \subseteq V$ такой, что $V = U \oplus W$).

Представления, отвечающие простым модулям, называются *неприводимыми*, а представления, отвечающие полупростым модулям, называются *вполне приводимыми*.

Ясно, что любой простой модуль является также и полупростым.

Теорема 1. *Если модуль V полупрост, то его можно разложить в прямую сумму простых подмодулей.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по размерности V.

Если $\dim V = 0$, то есть если модуль V нулевой, то он является прямой суммой пустого семейства подмодулей.

Пусть $\dim V > 0$ и для всех модулей меньшей размерности утверждение теоремы выполнено. Выберем в V минимальный по включению ненулевой подмодуль U. Ясно, что это простой подмодуль. Поскольку модуль V полупрост, мы можем найти подмодуль $W \subseteq V$ такой, что $V = U \oplus W$. Докажем, что модуль W полупрост.

Пусть $U' \subseteq W$ — подмодуль. Поскольку модуль V полупрост, существует подмодуль $W' \subseteq V$ такой, что $V = U' \oplus W'$. Тогда $W'' = W' \cap W$ — подмодуль модуля W, и $W = U' \oplus W''$.

Так как $\dim W < \dim V$, то W разлагается в прямую сумму простых подмодулей. Следовательно, это верно и для V. □

Теорема 2. *Если модуль V можно разложить в сумму (не обязательно прямую) простых подмодулей, то он полупрост.*

Доказательство. Пусть $V = V_1 + \cdots + V_k$, где V_i — простые подмодули, и пусть $U \subseteq V$ — некоторый подмодуль. Найдем некоторое максимальное по включению множество индексов $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, удовлетворяющее условию $U \cap \sum\limits_{i \in I} V_i = 0$. Положим $W = \sum\limits_{i \in I} V_i$. Докажем, что $V = U \oplus W$.

Пусть V_j — один из простых модулей, входящих в разложение $V = V_1 + \cdots + V_k$. Предположим, что $V_j \nsubseteq (U + W)$. Тогда $j \notin I$ и $V_j \cap (U + W) = 0$ (поскольку модуль V_j прост). Но тогда $U \cap (W + V_j) = 0$, в противоречии с выбором I. Следовательно, все V_j лежат в $U + W$, так что $V = U + W$. Поскольку $U \cap W = 0$, эта сумма прямая. □

Упражнение 1. Пусть $V = V_1 + \cdots + V_k$, где V_i — простые подмодули. Доказать, что найдется такое подмножество $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, что $V = \bigoplus\limits_{i \in I} V_i$.

Определение 7. Гомоморфизм модуля в себя называется *эндоморфизмом*. Множество всех эндоморфизмов A-модуля V обозначается через $\operatorname{End}_A V$. Эндоморфизмы левого A-модуля V мы будем записывать *справа* от элементов V, то есть мы считаем V *правым* $(\operatorname{End}_A V)$-модулем. Аналогично, эндоморфизмы правого модуля действуют на него слева.

Упражнение 2. Доказать, что $\operatorname{End}_A V$ является подалгеброй алгебры $\operatorname{End}_{\Bbbk} V$ всех линейных операторов в пространстве V.

Теорема 3. *Если U и V — простые модули, то любой ненулевой гомоморфизм $F : U \to V$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Ядро и образ гомоморфизма являются подмодулями. Если $F \neq 0$, то $\operatorname{Ker} F = 0$, $\operatorname{Im} F = V$ (так как модули U и V просты). Поэтому гомоморфизм F обратим, то есть является изоморфизмом. □

Следствие 1. *Алгебра эндоморфизмов простого A-модуля V является телом.*

Следствие 2 (Лемма Шура). *Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то любой эндоморфизм простого A-модуля V скалярен.*

Доказательство. Пусть $F : V \to V$ — эндоморфизм, λ — его собственное значение. Эндоморфизм $F - \lambda E$ необратим, поэтому он нулевой. □

Пример 1. Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, U — простой левый A-модуль и

$$V = \underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{n} \simeq U \otimes \Bbbk^n.$$

Рассмотрим произвольный A-эндоморфизм $F : V \to V$. Применим его к элементу вида

$$v_i(u) = (0, \ldots, 0, u, 0, \ldots, 0),$$

где u стоит на i-м месте. Получим $v_i(u)F = (uF_{i1}, \ldots, uF_{in})$, где, очевидно, $F_{ij} \in \operatorname{End}_A U$. По лемме Шура F_{ij} — умножение на некоторую константу $\lambda_{ij} \in \Bbbk$. Тогда применение эндоморфизма F к строке $(u_1, \ldots, u_n)$ — это умножение ее справа на матрицу (λ_{ij}). Таким образом, $\operatorname{End}_A V = M_n(\Bbbk)$.

Теорема 4 (о двойном централизаторе)**.** *Пусть A — некоторая подалгебра алгебры* $\operatorname{End}_\Bbbk V$*, действующая в V слева, причем известно, что левый A-модуль V полупрост. Положим $B = \operatorname{End}_A V$. Тогда* $\operatorname{End}_B V = A$.

Доказательство. Докажем сперва одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Для любого $v \in V$ и любого $\varphi \in \operatorname{End}_B V$ найдется такой элемент $a \in A$, что $av = \varphi v$.*

Доказательство. Рассмотрим подмодуль $Av \subseteq V$. Так как A-модуль V полупрост, то имеет место разложение в прямую сумму $V = Av \oplus U$ для некоторого A-подмодуля $U \subseteq V$. Проекция $\pi : V \to Av$ вдоль U является эндоморфизмом A-модуля V, то есть $\pi \in B$. Следовательно, $\varphi v = \varphi(v\pi) = (\varphi v)\pi$, то есть $\varphi v \in Av$, что и требовалось доказать. □

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть φ — произвольный элемент алгебры $\operatorname{End}_B V$. Докажем, что $\varphi \in A$.

Рассмотрим A-модуль

$$W = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n},$$

где $n = \dim V$. Так же, как и в примере 1, проверяем, что $\operatorname{End}_A W = M_n(B)$. Ясно, что $\varphi^{(n)} = \varphi \oplus \cdots \oplus \varphi : W \to W$ является эндоморфизмом $M_n(B)$-модуля W. Положим $w = (v_1, \ldots, v_n)$, где векторы $v_1, \ldots, v_n$ составляют базис V как векторного пространства над $\Bbbk$. По лемме 1 найдется такой элемент $a \in A$, что $aw = \varphi^{(n)}w$, то есть $av_i = \varphi v_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Но это означает, что $a = \varphi$. □

Следствие 3. *Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, A — некоторая подалгебра алгебры* $\operatorname{End}_\Bbbk V$*, действующая в V слева, причем левый A-модуль V прост. Тогда* $A = \operatorname{End}_\Bbbk V$.

Доказательство. По лемме Шура $\operatorname{End}_A V = \Bbbk$, откуда, по теореме о двойном централизаторе, получаем $\operatorname{End}_\Bbbk V = A$. □

Полупростые алгебры и представления конечных групп

Пусть A — алгебра над полем $\Bbbk$ (напомню, что мы всегда предполагаем A ассоциативной конечномерной алгеброй с единицей). Для каждого $a \in A$ рассмотрим следующие операторы в A как в линейном пространстве над $\Bbbk$: оператор $L(a)$ левого умножения на a и оператор $R(a)$ правого умножения на a. Мы получаем две алгебры линейных операторов в пространстве A: алгебру $L(A)$ операторов вида $L(a)$ (действующих слева) и алгебру $R(A)$ операторов вида $R(a)$ (действующих справа).

Утверждение 1. *Каждая из алгебр $L(A)$ и $R(A)$ изоморфна алгебре A. Кроме того,* $\operatorname{End}_{L(A)} A = R(A)$ *и* $\operatorname{End}_{R(A)} A = L(A)$.

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм $A \to L(A)$, переводящий $a \in A$ в $L(a)$. Ясно, что он сюръективен. Пусть a_0 принадлежит его ядру. Тогда $a_0 = a_0 \cdot 1 = L(a_0)1 = 0$. Поэтому $L(A) \simeq A$. Аналогично, $R(A) \simeq A$.

Пусть теперь $\varphi \in \operatorname{End}_{L(A)} A$. Положим $b = 1\varphi$. Тогда $a\varphi = (L(a)1)\varphi = L(a)(1\varphi) = ab = aR(b)$ для любого $a \in A$, то есть $\varphi = R(b)$. Поэтому $\operatorname{End}_{L(A)} A = R(A)$. Аналогично доказываем, что $\operatorname{End}_{R(A)} A = L(A)$. □

Определение 8. Алгебра A называется *полупростой*, если она полупроста как левый модуль над собой.

Теорема 5. *Полупростая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр над этим полем.*

Доказательство. Разложим A как левый A-модуль в прямую сумму простых модулей, собирая вместе изоморфные слагаемые:

$$A \simeq W = \underbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_1}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{V_k \oplus \cdots \oplus V_k}_{n_k},$$

где $V_1, \ldots, V_k$ — неизоморфные простые левые A-модули. Пусть $n = n_1 + \cdots + n_k$ Любой элемент $w \in W$ записывается в виде $w = (v_1, \ldots, v_n)$, где $v_i \in V_1$ при $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $v_i \in V_2$ при $n_1 + 1 \leqslant i \leqslant n_1 + n_2$, и т. д.

Рассмотрим произвольный A-эндоморфизм $F : W \to W$. Применим его к элементу вида

$$w_i(v) = (0, \ldots, 0, v, 0, \ldots, 0),$$

где $v \in V_r$ стоит на i-м месте. Получим

$$w_i(v)F = (vF_{i1}, \ldots, vF_{in}),$$

где, очевидно, $F_{ij} \in \operatorname{Hom}_A(V_r, V_s)$ (гомоморфизмы A-модулей мы пишем справа; номер s простого A-модуля V_s определяется индексом j). Поскольку любой ненулевой гомоморфизм между простыми A-модулями является изоморфизмом, то $F_{ij} = 0$ при $r \neq s$, а при $r = s$ по лемме Шура F_{ij} — умножение на некоторую константу $\lambda_{ij} \in \Bbbk$. Поэтому применение эндоморфизма F к строке $(u_1, \ldots, u_n)$ — это умножение ее справа на блочно-диагональную матрицу (λ_{ij}) с размерами блоков $n_1, \ldots, n_k$. Таким образом, $\operatorname{End}_A W = M_{n_1}(\Bbbk) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\Bbbk)$. Однако $\operatorname{End}_A W \simeq \operatorname{End}_{L(A)} A = R(A) \simeq A$ по утверждению 1. □

Отметим, что из полученного описания алгебры A следует, что $\dim V_i = n_i$, и что A-модуль V_i изоморфен $\Bbbk^{n_i}$ со следующим действием алгебры A: для $a \in A$ находим образ A при выбранном изоморфизме $A \xrightarrow{\sim} M_{n_1}(\Bbbk) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\Bbbk)$, выделяем i-й диагональный блок (размером $n_i \times n_i$), и применяем эту матрицу к элементам $\Bbbk^{n_i}$.

Теорема 6. *Пусть алгебра A полупроста и $V_1, \ldots, V_k$ — все неизоморфные простые A-модули, входящие в разложение A как левого A-модуля. Тогда любой левый A-модуль полупрост, и любой простой левый A-модуль изоморфен одному из V_i.*

Доказательство. Подмодуль A как левого A-модуля — это не что иное, как левый идеал. Представим A как прямую сумму минимальных (ненулевых) левых идеалов: $A = \bigoplus I_j$, где, по предположению, каждый из идеалов I_j изоморфен (как левый A-модуль) некоторому из V_i. Пусть V — произвольный левый A-модуль, и пусть $v \in V$. Тогда $Av = \sum I_j v$, где каждый из подмодулей $I_j v$ либо простой (изоморфный одному из V_i), либо нулевой. Пусть $(v_1, \ldots, v_s)$ — базис V. Тогда $V = \sum Av_r = \sum I_j v_r$, то есть модуль V является суммой простых модулей. Следовательно, он полупрост. Если он прост, то равен одному из слагаемых $I_j v_r$, поэтому изоморфен одному из V_i. □

Чтобы применять полученные теоремы к представлениям конечной группы, мы должны найти некоторую алгебру, теория представлений которой будет эквивалентна теории представлений группы.

Определение 9. Для конечной группы G рассмотрим линейное пространство $\Bbbk G$ всех формальных линейных комбинаций элементов группы. На базисе пространства $\Bbbk G$ определено ассоциативное умножение (групповая операция); распространяя её по дистрибутивности на всё пространство $\Bbbk G$, получаем на нём структуру ассоциативной алгебры с единицей. Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$, и $\rho : G \to \operatorname{End}_{\Bbbk} V$ — линейное представление группы G. Определим в пространстве V операцию левого умножения на элементы групповой алгебры, положив $\Bigl(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g\Bigr) v = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g \rho(g) v$.

Упражнение 3. Доказать, что таким образом пространство V приобретает структуру левого $\Bbbk G$-модуля. Более того, предъявленная конструкция $\Bbbk G$-модуля по представлению группы G продолжается до функтора из категории конечномерных линейных представлений группы G над полем $\Bbbk$ в категорию конечномерных левых $\Bbbk G$-модулей, осуществляющего эквивалентность этих категорий.

Теорема 7 (Машке)**.** *Пусть G — конечная группа, $\Bbbk$ — поле, причем $\operatorname{char}\Bbbk$ не делит $|G|$. Тогда любой конечномерный $\Bbbk G$-модуль полупрост.*

Доказательство. Пусть V — конечномерный $\Bbbk G$-модуль, и U — его подмодуль. Рассмотрим произвольное линейное отображение $\pi_0 : V \to U$, тождественное на U (проекцию вдоль некоторого дополнительного подпространства W_0). Положим

$$\pi v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \pi_0 g^{-1} v$$

для любого $v \in V$. Отображение $\pi : V \to U$ тоже линейно, тождественно на U, но ещё и G-*инвариантно*, то есть $h\pi = \pi h$ для любого $h \in G$. Поэтому $W = \operatorname{Ker}\pi$ является $\Bbbk G$-помодулем модуля V. При этом $V = U \oplus W$. □

Следствие 4. *При $\operatorname{char}\Bbbk$ не делящей $|G|$ групповая алгебра $\Bbbk G$ полупроста.*

Итак, мы можем применить теоремы 5 и 6 к групповой алгебре конечной группы. При этом, зная о существовании разложения алгебры в прямую сумму матричных колец, мы не знаем самого этого разложения. Поэтому важно выразить как можно больше свойств этого разложения в инвариантных терминах.

Прежде всего, размерность алгебры A выражается через числа n_i по формуле $\dim A = \sum n_i^2$. Поэтому из теоремы 6 следует

Утверждение 2. *Размерность полупростой алгебры A над алгебраически замкнутым полем равна сумме квадратов размерностей неизоморфных простых A-модулей.*

Следствие 5. *Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и его характеристика не делит порядок конечной группы G. Тогда сумма квадратов размерностей неэквивалентных неприводимых представлений группы G над полем $\Bbbk$ равна порядку этой группы.*

Дадим теперь важное

Определение 10. *Центром* алгебры A называется множество всех таких элементов $z \in A$, что $za = az$ для любого $a \in A$. Центр алгебры A обозначается через $Z(A)$.

Центр ассоциативной алгебры с единицей является коммутативной алгеброй с единицей.

Ясно, что центр полной матричной алгебры состоит только из скалярных матриц. Кроме того, центром прямой суммы алгебр является прямая сумма центров слагаемых. Поэтому размерность центра равна числу слагаемых. Отсюда получаем

Утверждение 3. *Число неизоморфных простых A-модулей для полупростой алгебры A над алгебраически замкнутым полем равно $\dim Z(A)$.*

Пусть $A = \Bbbk G$. Найдем $Z(A)$. Ясно, что $z = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g g$ принадлежит $Z(A)$ тогда и только тогда, когда $hz = zh$ для любого $h \in G$. Поэтому

$$Z(A) = \Big\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \;\Big|\; (\forall g, h \in G)\ \lambda_{h^{-1}gh} = \lambda_g \Big\}.$$

Отсюда следует, что размерность центра групповой алгебры равна числу классов сопряженных элементов. Итак, получается

Следствие 6. *Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и его характеристика не делит порядок конечной группы G. Тогда число неэквивалентных неприводимых представлений группы G над полем $\Bbbk$ равно числу классов сопряженных элементов этой группы.*

Теория характеров

Определение 11. Пусть A — ассоциативная алгебра, а V — левый A-модуль. На двойственном пространстве V^* можно ввести структуру *правого* A-модуля, положив $(\xi a)(v) = \xi(av)$ для любых $\xi \in V^*$ и $v \in V$. Полученный правый A-модуль V^* называется *двойственным модулем* к V.

Определение 12. Пусть V — левый A-модуль, а U — правый A-модуль. Билинейная форма $B : U \times V \to \Bbbk$ называется A-*инвариантной*, если $B(ua, v) = B(u, av)$ для любых $u \in U$, $v \in V$ и $a \in A$.

Упражнение 4. Доказать, что билинейная форма $B : U \times V \to \Bbbk$ является A-инвариантной тогда и только тогда, когда соответствующее линейное отображение $U \to V^*$ является гомоморфизмом правых A-модулей (и тогда и только тогда, когда соответствующее линейное отображение $V \to U^*$ является гомоморфизмом левых A-модулей).

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{C}$ (или любым алгебраически замкнутым полем характеристики ноль). Рассмотрим билинейную форму $(a, b) = \operatorname{tr} L_a L_b$ на A (напомню, что для любого $a \in A$ через L_a мы обозначаем оператор левого умножения на a в алгебре A).

Упражнение 5. Доказать, что эта билинейная форма является симметрической и A-инвариантной.

Утверждение 4. *Пусть алгебра A полупроста. Тогда билинейная форма $(\ ,\ )$ невырождена.*

Доказательство. По теореме 5 существует разложение $A = \bigoplus A_i$, где A_i — идеал, изоморфный $M_{n_i}(\mathbb{C})$. Идеалы A_i попарно ортогональны относительно формы $(\ ,\ )$ (докажите это!). Поэтому достаточно проверить невырожденность ограничения нашей формы на каждый из идеалов A_i, другими словами, надо доказать утверждение в случае $A = M_n(\mathbb{C})$.

Однако для $a, b \in M_n(\mathbb{C})$ мы имеем $\operatorname{tr} L_a L_b = \operatorname{tr} L_{ab} = n \operatorname{tr} ab$ (докажите это!). Поэтому невырожденность формы $(\ ,\ )$ следует из невырожденности формы $\operatorname{tr} ab$ на $M_n(\mathbb{C})$. □

Итак, для полупростой алгебры над полем $\mathbb{C}$ форма $(\ ,\ )$ определяет изоморфизм A как левого и правого A-модуля с двойственным модулем A^*. Если $A = \mathbb{C}G$, то A^* естественно отождествляется с пространством $\mathbb{C}[G]$ комплексных функций на группе. Посмотрим, какой вид имеет форма $(\ ,\ )$ на $\mathbb{C}G$ и соответствующий изоморфизм $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}[G]$.

Заметим, что для любого неединичного $g \in G$ у матрицы оператора L_g на главной диагонали стоят нули, т. е. $\operatorname{tr} L_g = 0$. Если же $g = e$, то $L_g = \mathrm{id}$ и $\operatorname{tr} L_g = |G|$. Отсюда мы получаем, что

$$\Big(\sum_{g \in G} \lambda_g g, \sum_{g \in G} \mu_g g\Big) = |G| \sum_{g \in G} \lambda_g \mu_{g^{-1}}.$$

Соответствующий изоморфизм $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}[G]$ переводит g в $|G|\delta_{g^{-1},\bullet}$ — функцию на G, равную $|G|$ на g^{-1} и нулю на остальных элементах группы G. Перенося с помощью этого изоморфизма билинейную форму $(\ ,\ )$ с $\mathbb{C}G$ на $\mathbb{C}[G]$, получаем

$$(f_1, f_2) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} f_1(g) f_2(g^{-1}).$$

Определение 13. Пусть ρ — представление группы G в конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. *Характером* представления ρ называется функция $\chi_\rho(g) = \operatorname{tr} \rho(g) \in \Bbbk[G]$. характер неприводимого представления называется *неприводимым характером* группы G.

Теорема 8. *Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — все неизоморфные простые $\mathbb{C}G$-модули, $n_i = \dim V_i$, а $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — характеры соответствующих представлений группы G. Положим*

$$\varepsilon_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) g^{-1} \in \mathbb{C}G.$$

Тогда элементы ε_i принадлежат центру алгебры $\mathbb{C}G$, составляют его базис и, кроме того, удовлетворяют соотношениям:

1. $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$;
2. $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ *при* $i \neq j$;
3. $\sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 1$.

Доказательство. Обозначим через ρ_i представление группы G в пространстве V_i. Той же буквой мы будем обозначать представление алгебры $\mathbb{C}G$ в пространстве V_i. Характер $\chi_i \in \mathbb{C}[G]$ мы рассматриваем как линейную функцию на $\mathbb{C}G$, пользуясь отождествлением $(\mathbb{C}G)^* = \mathbb{C}[G]$. Ясно, что $\chi_i(x) = \operatorname{tr} \rho_i(x)$ для любого $x \in \mathbb{C}G$.

Мы знаем, что алгебра $\mathbb{C}G$ изоморфна алгебре $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C})$. Пусть $\psi : A \to \mathbb{C}G$ — изоморфизм. Естественный базис центра алгебры A составляют элементы вида $E_i = (0, \ldots, 0, E, \ldots, 0)$, где единичная матрица стоит на i-м месте, а на остальных — нули. Докажем, что $\psi(E_i) = \varepsilon_i$.

Представление $\rho_i \circ \psi$ алгебры A эквивалентно представлению в пространстве $\mathbb{C}^{n_i}$, где каждый элемент $a = (a_1, \dots, a_k)$ действует матрицей $a_i \in M_{n_i}(\mathbb{C})$. Поэтому $\operatorname{tr} \rho_i \circ \psi(a) = \operatorname{tr} a_i$. С другой стороны, $\operatorname{tr} L_a L_{E_i} = \operatorname{tr} L_{aE_i} = n_i \operatorname{tr} a_i$. Поэтому $(x, \psi(E_i)) = n_i \chi_i(x) = (x, \varepsilon_i)$ для любого $x \in \mathbb{C}G$. Из невырожденности формы $(\ ,\ )$ следует, что $\psi(E_i) = \varepsilon_i$.

Итак, элементы $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = (\psi(E_1), \dots, \psi(E_k))$ — базис $Z(\mathbb{C}G)$. Соотношения между ними следуют из соответствующих соотношений между E_i, которые очевидны. □

Замечание. Из доказательства теоремы ясно, что ε_i действует единичным оператором в V_i и нулем во всех остальных простых $\mathbb{C}G$-модулях V_j. Поэтому в произвольном $\mathbb{C}G$-модуле ε_i действует как инвариантный проектор на i*-ю изотипическую компоненту*, то есть на сумму всех простых $\mathbb{C}G$-подмодулей, изоморфных V_i.

Следствие 7. *Характеры различных неприводимых комплексных представлений группы G линейно независимы и составляют базис пространства функций на G, постоянных на классах сопряженных элементов.*

Доказательство. Характер χ_i — образ $n_i^{-1}\varepsilon_i$ при изоморфизме $\mathbb{C}G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[G]$, задаваемом формой $(\ ,\ )$. Поскольку ε_i составляют базис в $Z(\mathbb{C}G)$, то и χ_i составляют базис в образе этого пространства, равном, как легко видеть, пространству функций на G, постоянных на классах сопряженных элементов. □

Следствие 8. *Для неприводимых комплексных характеров χ_i группы G выполнено следующее соотношение ортогональности:*

$$(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}.$$

Доказательство. Это следует из очевидного равенства $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = n_i^2$. □

Следствие 9. *Характер χ комплексного представления группы G является неприводимым тогда и только тогда, когда $(\chi, \chi) = 1$.*

Доказательство. Это следует из того, что характер прямой суммы представлений равен сумме их характеров, а любое комплексное представление группы G является вполне приводимым. □

Упражнение 6. Пусть V, W — $\mathbb{C}G$-модули, а χ_V, χ_W — соответствующие характеры. Доказать, что $\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$.

Утверждение 5. *Пусть χ — характер комплексного представления ρ группы G в пространстве V. Тогда $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ для любого $g \in G$.*

Доказательство. В любом $\mathbb{C}G$-модуле есть G-инвариантное эрмитово скалярное произведение (действительно, можно взять любое эрмитово скалярное произведение и усреднить его по группе G, как мы это делали с проектором в доказательстве теоремы Машке). Выберем такое скалярное произведение в пространстве V и запишем матрицы операторов представления в каком-нибудь ортонормированном базисе. Пусть $C(g)$ — матрица оператора $\rho(g)$. Тогда $C(g^{-1}) = C(g)^{-1} = \overline{C(g)^t}$. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. □

Следствие 10. *Определим в $\mathbb{C}[G]$ эрмитово скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ формулой*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2}(g).$$

Тогда для любых двух характеров χ_1, χ_2 выполнено равенство

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = (\chi_1, \chi_2)$$

В силу этого соотношение ортогональности для характеров и его следствия остаются справедливыми при замене билинейной формы $(\ ,\ )$ на эрмитову форму $\langle\ ,\ \rangle$.