Независимый Московский Университет

Алгебра – II

Второй курс, осенний семестр 1996/97 г.
Лекции 7–11

Алгебры и модули

Определение 1. Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над полем $\Bbbk$. *Левым A-модулем* называется векторное пространство V над полем $\Bbbk$, снабженное операцией *левого умножения* на элементы алгебры A, причем требуется выполнение следующих условий:

1. $1v = v$ для любого $v \in V$;
2. отображение $A \times V \to V$, переводящее всякую пару (a, v) в av, билинейно;
3. $(ab)v = a(bv)$ для любых $a, b \in A$, $v \in V$.

Аналогично определяется понятие *правого A-модуля*.

Ясно, что понятия левого A-модуля и представления алгебры A тесно связаны: если задано представление $\rho : A \to \operatorname{End}_{\Bbbk} V$, то V получает естественную структуру левого A-модуля (произведение av определяется как $\rho(a)v$); наоборот, если векторное пространство V является левым A-модулем, то тем самым задается представление алгебры A в пространстве V (по определению полагаем $\rho(a)v = av$).

Далее буква A обозначает ассоциативную алгебру с единицей над полем $\Bbbk$. Всё сказанное о левых A-модулях буквально переносится на правые A-модули.

Все векторные пространства (в том числе алгебры и модули над ними) будут предполагаться конечномерными (если не оговорено противное).

Определение 2. Пусть V — левый A-модуль. *Подмодулем* модуля V называется любое подпространство $U \subseteq V$, замкнутое относительно умножения на все элементы алгебры A. Если U — подмодуль левого A-модуля V, то факторпространство V/U наделяется естественной структурой левого A-модуля (полагаем $a(v + U) = av + U$ для любго $a \in A$ и любого смежного класса $a + U \in V/U$; корректность этого определения следует из замкнутости U относительно умножения на элементы кольца A). Модуль V/U называется *фактормодулем* модуля V по подмодулю U.

Определение 3. Пусть V, W — левые A-модули. *Гомоморфизмом* модуля V в модуль W называется любое линейное отображение $F : V \to W$, удовлетворяющее условию $F(av) = aF(v)$ для любых $a \in A$ и $v \in V$. *Изоморфизмом* называется обратимый гомоморфизм. Если существует изоморфизм $F : V \to W$, то модули V и W называются *изоморфными*.

Понятия внешней прямой суммы и внутренней прямой суммы автоматически переносятся с векторных пространств на модули (как и на представления).

Определение 4. Левый A-модуль V называется *простым*, если он ненулевой и у него нет нетривиальных подмодулей (то есть подмодулей, отличных от 0 и V). Левый A-модуль V называется *полупростым*, если всякий подмодуль $U \subseteq V$ является прямым слагаемым (то есть существует подмодуль $W \subseteq V$ такой, что $V = U \oplus W$).

Ясно, что представления, отвечающие простым модулям, являются неприводимыми, а представления, отвечающие полупростым модулям, являются вполне приводимыми.

Далее я приведу формулировки нескольких знакомых вам теорем о представлениях в переводе на язык модулей.

Теорема 1. *Если модуль V полупрост, то его можно разложить в прямую сумму простых подмодулей.*

Теорема 2. *Если модуль V можно разложить в сумму (не обязательно прямую) простых подмодулей, то он полупрост.*

Определение 5. Гомоморфизм модуля в себя называется *эндоморфизмом*. Множество всех эндоморфизмов A-модуля V обозначается через $\operatorname{End}_A V$. Эндоморфизмы левого A-модуля V мы будем записывать *справа* от элементов V, то есть мы считаем V *правым* $(\operatorname{End}_A V)$-модулем. Аналогично, эндоморфизмы правого модуля действуют на него слева.

Упражнение 1. Доказать, что $\operatorname{End}_A V$ является подалгеброй алгебры $\operatorname{End}_{\Bbbk} V$ всех линейных операторов в пространстве V.

Теорема 3. *Если U и V — простые модули, то любой ненулевой гомоморфизм $F : U \to V$ является изоморфизмом.*

Следствие 1. *Алгебра эндоморфизмов простого A-модуля V является телом.*

Следствие 2 (Лемма Шура)**.** *Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то любой эндоморфизм простого A-модуля V скалярен.*

Теорема 4. *Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, U — простой левый A-модуль и*

$$V = \underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{n} = U \otimes \Bbbk^n.$$

Тогда любое подмодуль A-модуля V имеет вид $U \otimes L$, где L — подпространство пространства $\Bbbk^n$.

Теорема 5. *В условиях предыдущей теоремы* $\operatorname{End}(V) \simeq M_n(\Bbbk)$.

А теперь докажем новую теорему (похитрее).

Теорема 6 (о двойном централизаторе)**.** *Пусть A — некоторая подалгебра алгебры* $\operatorname{End}_{\Bbbk} V$*, действующая в V слева, причем известно, что левый A-модуль V полупрост. Положим $B =$* $\operatorname{End}_A V$*. Тогда* $\operatorname{End}_B V = A$*.*

Доказательство. Докажем сперва одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Для любого $v \in V$ и любого $\varphi \in$* $\operatorname{End}_B V$ *найдется такой элемент $a \in A$, что $av = \varphi v$.*

Доказательство. Рассмотрим подмодуль $Av \subseteq V$. Так как A-модуль V полупрост, то имеет место разложение в прямую сумму $V = Av \oplus U$ для некоторого A-подмодуля $U \subseteq V$. Проекция $\pi : V \to Av$ вдоль U является эндоморфизмом A-модуля V, то есть $\pi \in B$. Следовательно, $\varphi v = \varphi(v\pi) = (\varphi v)\pi$, то есть $\varphi v \in Av$, что и требовалось доказать. □

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть φ — произвольный элемент алгебры $\operatorname{End}_B V$. Докажем, что $\varphi \in A$.

Рассмотрим A-модуль

$$W = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n},$$

где $n = \dim V$. Легко видеть, что $\operatorname{End}_A W = M_n(B)$. Ясно, что $\varphi^{(n)} = \varphi \oplus \cdots \oplus \varphi : W \to W$ является эндоморфизмом $M_n(B)$-модуля W. Положим $w = (v_1, \ldots, v_n)$, где векторы $v_1, \ldots, v_n$ составляют базис V как векторного пространства над $\Bbbk$. По лемме 1 найдется такой элемент $a \in A$, что $aw = \varphi^{(n)} w$, то есть $av_i = \varphi v_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Но это означает, что $a = \varphi$. □

Следствие 3 (Теорема Бернсайда)**.** *Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, A — некоторая подалгебра алгебры* $\operatorname{End}_{\Bbbk} V$*, действующая в V слева, причем левый A-модуль V прост. Тогда* $A = \operatorname{End}_{\Bbbk} V$*.*

Доказательство. По лемме Шура $\operatorname{End}_A V = \Bbbk$, откуда, по теореме о двойном централизаторе, получаем $\operatorname{End}_{\Bbbk} V = A$. □

Полупростые алгебры и представления конечных групп

Пусть A — алгебра над полем $\Bbbk$ (напомню, что мы всегда предполагаем A ассоциативной конечномерной алгеброй с единицей). Для каждого $a \in A$ рассмотрим следующие операторы в A как в линейном пространстве над $\Bbbk$: оператор $L(a)$ левого умножения на a и оператор $R(a)$ правого умножения на a. Мы получаем две алгебры линейных операторов в пространстве A: алгебру $L(A)$ операторов вида $L(a)$ (действующих слева) и алгебру $R(A)$ операторов вида $R(a)$ (действующих справа).

Утверждение 1. *Каждая из алгебр $L(A)$ и $R(A)$ изоморфна алгебре A. Кроме того,* $\operatorname{End}_{L(A)} A = R(A)$ *и* $\operatorname{End}_{R(A)} A = L(A)$*.*

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм $A \to L(A)$, переводящий $a \in A$ в $L(a)$. Ясно, что он сюръективен. Пусть a_0 принадлежит его ядру. Тогда $a_0 = a_0 \cdot 1 = L(a_0)1 = 0$. Поэтому $L(A) \simeq A$. Аналогично, $R(A) \simeq A$.

Пусть теперь $\varphi \in \operatorname{End}_{L(A)} A$. Положим $b = 1\varphi$. Тогда $a\varphi = (L(a)1)\varphi = L(a)(1\varphi) = ab = aR(b)$ для любого $a \in A$, то есть $\varphi = R(b)$. Поэтому $\operatorname{End}_{L(A)} A = R(A)$. Аналогично доказываем, что $\operatorname{End}_{R(A)} A = L(A)$. □

Определение 6. Алгебра A называется *полупростой*, если она полупроста как левый модуль над собой.

Теорема 7. *Полупростая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр над этим полем.*

Доказательство. Разложим A как левый A-модуль в прямую сумму простых модулей, собирая вместе изоморфные слагаемые:

$$A \simeq W = \underbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_1}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{V_k \oplus \cdots \oplus V_k}_{n_k},$$

где $V_1, \ldots, V_k$ — неизоморфные простые левые A-модули. Пусть $n = n_1 + \cdots + n_k$ Любой элемент $w \in W$ записывается в виде $w = (v_1, \ldots, v_n)$, где $v_i \in V_1$ при $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $v_i \in V_2$ при $n_1 + 1 \leqslant i \leqslant n_1 + n_2$, и т. д.

Рассмотрим произвольный A-эндоморфизм $F : W \to W$. Применим его к элементу вида

$$w_i(v) = (0, \ldots, 0, v, 0, \ldots, 0),$$

где $v \in V_r$ стоит на i-м месте. Получим

$$w_i(v)F = (vF_{i1}, \ldots, vF_{in}),$$

где, очевидно, $F_{ij} \in \operatorname{Hom}_A(V_r, V_s)$ (гомоморфизмы A-модулей мы пишем справа; номер s простого A-модуля V_s определяется индексом j). Поскольку любой ненулевой гомоморфизм между простыми A-модулями является изоморфизмом, то $F_{ij} = 0$ при $r \neq s$, а при $r = s$ по лемме Шура F_{ij} — умножение на некоторую константу $\lambda_{ij} \in \Bbbk$. Поэтому применение эндоморфизма F к строке $(u_1, \ldots, u_n)$ — это умножение её справа на блочно-диагональную матрицу (λ_{ij}) с размерами блоков $n_1, \ldots, n_k$. Таким образом, $\operatorname{End}_A W = M_{n_1}(\Bbbk) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\Bbbk)$. Однако $\operatorname{End}_A W \simeq \operatorname{End}_{L(A)} A = R(A) \simeq A$ по утверждению 1. □

Отметим, что из полученного описания алгебры A следует, что $\dim V_i = n_i$, и что A-модуль V_i изоморфен $\Bbbk^{n_i}$ со следующим действием алгебры A: для $a \in A$ находим образ A при выбранном изоморфизме $A \xrightarrow{\sim} M_{n_1}(\Bbbk) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\Bbbk)$, выделяем i-й диагональный блок (размером $n_i \times n_i$), и применяем эту матрицу к элементам $\Bbbk^{n_i}$.

Теорема 8. *Пусть алгебра A полупроста и $V_1, \ldots, V_k$ — все неизоморфные простые A-модули, входящие в разложение A как левого A-модуля. Тогда любой левый A-модуль полупрост, и любой простой левый A-модуль изоморфен одному из V_i.*

Доказательство. Подмодуль A как левого A-модуля — это не что иное, как левый идеал. Представим A как прямую сумму минимальных (ненулевых) левых идеалов: $A = \bigoplus I_j$, где, по предположению, каждый из идеалов I_j изоморфен (как левый A-модуль) некоторому из V_i. Пусть V — произвольный левый A-модуль, и пусть $v \in V$. Тогда $Av = \sum I_j v$, где каждый из подмодулей $I_j v$ либо простой (изоморфный одному из V_i), либо нулевой. Пусть $(v_1, \ldots, v_s)$ — базис V. Тогда $V = \sum Av_r = \sum I_j v_r$, то есть модуль V является суммой простых модулей. Следовательно, он полупрост. Если он прост, то равен одному из слагаемых $I_j v_r$, поэтому изоморфен одному из V_i. □

Чтобы применять полученные теоремы к представлениям конечной группы, мы должны вспомнить, что теория представлений групповой алгебры (то есть теория $\Bbbk G$-модулей) эквивалентна теории представлений группы G.

Теорема 9. *При $\operatorname{char} \Bbbk$, не делящей $|G|$, групповая алгебра $\Bbbk G$ полупроста.*

Доказательство. По теореме Машке любой $\Bbbk G$-модуль полупрост. □

Итак, мы можем применить теоремы 7 и 8 к групповой алгебре конечной группы. При этом, зная о существовании разложения алгебры в прямую сумму матричных колец, мы не знаем самого этого разложения. Поэтому важно выразить как можно больше свойств этого разложения в инвариантных терминах.

Прежде всего, размерность алгебры A выражается через числа n_i по формуле $\dim A = \sum n_i^2$. Поэтому из теоремы 8 следует

Утверждение 2. *Размерность полупростой алгебры A над алгебраически замкнутым полем равна сумме квадратов размерностей неизоморфных простых A-модулей.*

Следствие 4. *Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и его характеристика не делит порядок конечной группы G. Тогда сумма квадратов размерностей неэквивалентных неприводимых представлений группы G над полем $\Bbbk$ равна порядку этой группы.*

Дадим теперь важное

Определение 7. *Центром* алгебры A называется множество всех таких элементов $z \in A$, что $za = az$ для любого $a \in A$. Центр алгебры A обозначается через $Z(A)$.

Центр ассоциативной алгебры с единицей является коммутативной алгеброй с единицей.

Ясно, что центр полной матричной алгебры состоит только из скалярных матриц. Кроме того, центром прямой суммы алгебр является прямая сумма центров слагаемых. Поэтому размерность центра равна числу слагаемых. Отсюда получаем

Утверждение 3. *Число неизоморфных простых A-модулей для полупростой алгебры A над алгебраически замкнутым полем равно $\dim Z(A)$.*

Пусть $A = \Bbbk G$. Найдем $Z(A)$. Ясно, что $z = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g g$ принадлежит $Z(A)$ тогда и только тогда, когда $hz = zh$ для любого $h \in G$. Поэтому

$$Z(A) = \Big\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \;\Big|\; (\forall g, h \in G)\ \lambda_{h^{-1}gh} = \lambda_g \Big\}.$$

Отсюда следует, что размерность центра групповой алгебры равна числу классов сопряженных элементов. Итак, получается

Следствие 5. *Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и его характеристика не делит порядок конечной группы G. Тогда число неэквивалентных неприводимых представлений группы G над полем $\Bbbk$ равно числу классов сопряженных элементов этой группы.*

Теория характеров

Определение 8. Пусть A — ассоциативная алгебра, а V — левый A-модуль. На двойственном пространстве V^* можно ввести структуру *правого* A-модуля, положив $(\xi a)(v) = \xi(av)$ для любых $\xi \in V^*$ и $v \in V$. Полученный правый A-модуль V^* называется *двойственным модулем* к V.

Определение 9. Пусть V — левый A-модуль, а U — правый A-модуль. Билинейная форма $B : U \times V \to \Bbbk$ называется *A-инвариантной*, если $B(ua, v) = B(u, av)$ для любых $u \in U$, $v \in V$ и $a \in A$.

Упражнение 2. Доказать, что билинейная форма $B : U \times V \to \Bbbk$ является A-инвариантной тогда и только тогда, когда соответствующее линейное отображение $U \to V^*$ является гомоморфизмом правых A-модулей (и тогда и только тогда, когда соответствующее линейное отображение $V \to U^*$ является гомоморфизмом левых A-модулей).

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{C}$ (или любым алгебраически замкнутым полем характеристики ноль). Рассмотрим билинейную форму $(a, b) = \operatorname{tr} L(a)L(b)$ на A (напомню, что для любого $a \in A$ через $L(a)$ мы обозначаем оператор левого умножения на a в алгебре A).

Упражнение 3. Доказать, что эта билинейная форма является симметрической и A-инвариантной.

Утверждение 4. *Пусть алгебра A полупроста. Тогда билинейная форма $(\ ,\ )$ невырождена.*

Доказательство. По теореме 7 существует разложение $A = \bigoplus A_i$, где A_i — идеал, изоморфный $M_{n_i}(\mathbb{C})$. Идеалы A_i попарно ортогональны относительно формы $(\ ,\ )$ (докажите это!). Поэтому достаточно проверить невырожденность ограничения нашей формы на каждый из идеалов A_i, другими словами, надо доказать утверждение в случае $A = M_n(\mathbb{C})$.

Однако для $a, b \in M_n(\mathbb{C})$ мы имеем $\operatorname{tr} L(a)L(b) = \operatorname{tr} L(ab) = n \operatorname{tr} ab$ (докажите это!). Поэтому невырожденность формы $(\ ,\ )$ следует из невырожденности формы $\operatorname{tr} ab$ на $M_n(\mathbb{C})$. □

Итак, для полупростой алгебры над полем $\mathbb{C}$ форма $(\ ,\ )$ определяет изморфизм A как левого и правого A-модуля с двойственным модулем A^*. Если $A = \mathbb{C}G$, то A^* естественно отождествляется с пространством $\mathbb{C}[G]$ комплексных функций на группе. Посмотрим, какой вид имеет форма $(\ ,\ )$ на $\mathbb{C}G$ и соответствующий изоморфизм $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}[G]$.

Заметим, что для любого неединичного $g \in G$ у матрицы оператора $L(g)$ на главной диагонали стоят нули, т. е. $\operatorname{tr} L(g) = 0$. Если же $g = e$, то $L(g) = \mathrm{id}$ и $\operatorname{tr} L(g) = |G|$. Отсюда мы получаем, что

$$\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g, \sum_{g\in G} \mu_g g\Big) = |G| \sum_{g\in G} \lambda_g \mu_{g^{-1}}.$$

Соответствующий изоморфизм $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}[G]$ переводит g в $|G|\delta_{g^{-1},\bullet}$ — функцию на G, равную $|G|$ на g^{-1} и нулю на остальных элементах группы G. Перенося с помощью этого изоморфизма билинейную форму $(\ ,\ )$ с $\mathbb{C}G$ на $\mathbb{C}[G]$, получаем

$$(f_1, f_2) = |G|^{-1} \sum_{g\in G} f_1(g) f_2(g^{-1}).$$

Определение 10. Пусть ρ — представление группы G в конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$. *Характером* представления ρ называется функция $\chi_\rho(g) = \operatorname{tr} \rho(g) \in \mathbb{C}[G]$. Характер неприводимого представления называется *неприводимым характером* группы G.

Теорема 10. *Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — все неизоморфные простые $\mathbb{C}G$-модули, $n_i = \dim V_i$, а $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — характеры соответствующих представлений группы G. Положим*

$$\varepsilon_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_i(g) g^{-1} \in \mathbb{C}G.$$

Тогда элементы ε_i принадлежат центру алгебры $\mathbb{C}G$, составляют его базис и, кроме того, удовлетворяют соотношениям:

1. $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$;
2. $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ *при* $i \neq j$;
3. $\sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 1$.

Доказательство. Обозначим через ρ_i представление группы G в пространстве V_i. Той же буквой мы будем обозначать представление алгебры $\mathbb{C}G$ в пространстве V_i. Характер $\chi_i \in \mathbb{C}[G]$ мы рассматриваем как линейную функцию на $\mathbb{C}G$, пользуясь отождествлением $(\mathbb{C}G)^* = \mathbb{C}[G]$. Ясно, что $\chi_i(x) = \operatorname{tr} \rho_i(x)$ для любого $x \in \mathbb{C}G$.

Мы знаем, что алгебра $\mathbb{C}G$ изоморфна алгебре $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C})$. Пусть $\psi : A \to \mathbb{C}G$ — изоморфизм. Естественный базис центра алгебры A составляют элементы вида $E_i = (0, \ldots, 0, E, \ldots, 0)$, где единичная матрица стоит на i-м месте, а на остальных — нули. Докажем, что $\psi(E_i) = \varepsilon_i$.

Представление $\rho_i \circ \psi$ алгебры A эквивалентно представлению в пространстве $\mathbb{C}^{n_i}$, где каждый элемент $a = (a_1, \ldots, a_k)$ действует матрицей $a_i \in M_{n_i}(\mathbb{C})$. Поэтому $\operatorname{tr} \rho_i \circ \psi(a) = \operatorname{tr} a_i$. С другой стороны, $\operatorname{tr} L(a)L(E_i) = \operatorname{tr} L(aE_i) = n_i \operatorname{tr} a_i$. Поэтому $(x, \psi(E_i)) = n_i \chi_i(x) = (x, \varepsilon_i)$ для любого $x \in \mathbb{C}G$. Из невырожденности формы $(\ ,\ )$ следует, что $\psi(E_i) = \varepsilon_i$.

Итак, элементы $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = (\psi(E_1), \ldots, \psi(E_k))$ — базис $Z(\mathbb{C}G)$. Сооношения между ними следуют из соответствующих соотношений между E_i, которые очевидны. □

Замечание. Из доказательства теоремы ясно, что ε_i действует единичным оператором в V_i и нулем во всех остальных простых $\mathbb{C}G$-модулях V_j. Поэтому в произвольном $\mathbb{C}G$-модуле ε_i действует как инвариантный проектор на *i-ю изотипическую компоненту*, то есть на сумму всех простых $\mathbb{C}G$-подмодулей, изоморфных V_i.

Следствие 6. *Характеры различных неприводимых комплексных представлений группы G линейно независимы и составляют базис пространства функций на G, постоянных на классах сопряженных элементов.*

Доказательство. Характер χ_i — образ $n_i^{-1}\varepsilon_i$ при изоморфизме $\mathbb{C}G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[G]$, задаваемом формой $(\, , \,)$. Поскольку ε_i составляют базис в $Z(\mathbb{C}G)$, то и χ_i составляют базис в образе этого пространства, равном, как легко видеть, пространству функций на G, постоянных на классах сопряженных элементов. □

Следствие 7. *Для неприводимых комплексных характеров χ_i группы G выполнено следующее соотношенее ортогональности:*

$$(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}.$$

Доказательство. Это следует из очевидного равенства $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = n_i^2$. □

Следствие 8. *Характер χ комплексного представления группы G является неприводимым тогда и только тогда, когда $(\chi, \chi) = 1$.*

Доказательство. Это следует из того, что характер прямой суммы представлений равен сумме их характеров, а любое комплексное представление группы G является вполне приводимым. □

Следствие 9. *Пусть ρ — представление группы G с характером χ, $\rho_1, \ldots, \rho_k$ — все различные неприводимые представления группы G, а $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — их характеры. Тогда кратность вхождения представления ρ_i в представление ρ равна (ρ_i, ρ).*

Упражнение 4. Пусть V, W — $\mathbb{C}G$-модули, а χ_V, χ_W — соответствующие характеры. Доказать, что $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$.

Утверждение 5. *Пусть χ — характер комплексного представления ρ группы G в пространстве V. Тогда $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ для любого $g \in G$.*

Доказательство. В любом $\mathbb{C}G$-модуле есть G-инвариантное эрмитово скалярное произведение (действительно, можно взять любое эрмитово скалярное произведение и усреднить его по группе G, как мы это делали с проектором в доказательстве теоремы Машке). Выберем такое скалярное произведение в пространстве V и запишем матрицы операторов представления в каком-нибудь ортонормированном базисе. Пусть $C(g)$ — матрица оператра $\rho(g)$. Тогда $C(g^{-1}) = C(g)^{-1} = \overline{C(g)^t}$. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. □

Следствие 10. *Определим в $\mathbb{C}[G]$ эрмитово скалярное произведение $\langle \, , \, \rangle$ формулой*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2}(g).$$

Тогда для любых двух характеров χ_1, χ_2 выполнено равенство

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = (\chi_1, \chi_2)$$

В силу этого соотношение ортогональности для характеров и его следствия остаются справедливыми при замене билинейной формы $(\, , \,)$ на эрмитову форму $\langle \, , \, \rangle$.

Пространства матричных элементов

Определение 11. *Пространством матричных элементов* представления ρ группы G называется подпространство пространства $\mathbb{C}[G]$, порожденное матричными элементами $a_{ij}(g)$ операторов представления $\rho(g)$ (в некотором базисе пространства представления).

Ясно, что пространство матричных элементов представления не зависит от выбора базиса в пространстве этого представления.

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_k$ — все различные неприводимые представления группы G размерностей $n_1, \ldots, n_k$. Будем воспринимать их как *матричные представления*, то есть выберем в пространстве каждого из представлений базис и будем записывать операторы представлений матрицами в соответствующем базисе. Из теорем 7 и 8 и из полупростоты групповой алгебры следует, что представление $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$ задает изоморфизм $\mathbb{C}G$ с алгеброй $M_{n_1, \ldots, n_k}(\mathbb{C})$ блочно-диагональных матриц размера $(n_1 + \cdots + n_k) \times (n_1 + \cdots + n_k)$ с диагональными блоками размеров $n_1 \times n_1, \ldots, n_k \times n_k$ (алгебра $M_{n_1, \ldots, n_k}(\mathbb{C})$ естественно отождествляется с алгеброй $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$).

Отождествим алгебру $\mathbb{C}G$ с алгеброй $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}))$ посредством изоморфизма $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$. Пусть ρ — произвольное представление группы G. Разложим его в сумму неприводимых: $\rho = \sum c_r \rho_r$. Легко видеть, что пространство матричных элементов представления ρ — аннулятор в $(M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}))^*$ суммы тех M_{n_r}, для которых $c_r = 0$. В частности, пространство матричных элементов представления ρ_r естественно изоморфно пространству $M^*_{n_r}$. Поэтому при изоморфизме $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}) \simeq (M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}))^*$, задаваемом формой $(a, b) = \operatorname{tr} L(a)L(b)$, слагаемое M_{n_r} соответствует пространству матричных элементов представления ρ_r. Нетрудно проверить, что матричному элементу $a^{(r)}_{ij}(\cdot)$ в представлении ρ_r отвечает матричная единица $E^{(r)}_{ji}$ слагаемого M_{n_r}, деленная на n_r. Поскольку, очевидно, $(E^{(r)}_{ji}, E^{(r')}_{j'i'}) = n_r \delta_{rr'} \delta_{ij'} \delta_{ji'}$, то мы получаем следующие значения билинейной формы $(\ ,\ )$ на матричных элементах:

$$(a^{(r)}_{ij}, a^{(r')}_{i'j'}) = n_r^{-1} \delta_{rr'} \delta_{ij'} \delta_{ji'}.$$

Пусть теперь в пространстве каждого из представлений ρ_r выбран *ортонормированный* базис относительно инвариантной эрмитовой формы. Тогда для матричных элементов в этих базисах выполнено равенство $a^{(r)}_{ij}(g^{-1}) = \overline{a^{(r)}_{ji}(g)}$. Поэтому мы получаем следующее *соотношение ортогональности для матричных элементов*:

$$\langle a^{(r)}_{ij}, a^{(r')}_{i'j'} \rangle = n_r^{-1} \delta_{rr'} \delta_{ii'} \delta_{jj'}.$$

Таким образом, матричные элементы неприводимых представлений составляют ортогональный базис пространства $\mathbb{C}[G]$ функций на группе G.

Отметим, наконец, что этот базис задает явное разложение $\mathbb{C}[G]$ в сумму минимальных инвариантных подпространств как относительно левого, так и относительно правого регулярного представления.

Индуцированные модули и представления

Определение 12. Пусть G — группа, H — её подгруппа, V — левый $\mathbb{C}H$-модуль, а $\rho : H \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$ — соответствующее линейное представление. Групповую алгебру $\mathbb{C}G$ можно рассматривать как левый $\mathbb{C}H$-модуль. Положим $W = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\mathbb{C}G, V)$. Иначе пространство W можно описать как множество всех функций на группе G со значениями в пространстве V, удовлетворяющих условиям $F(hg) = \rho(h)F(g)$ для любых $g \in G$ и $h \in H$.

Введем в W структуру левого $\mathbb{C}G$-модуля, положив $(gF)(g') = F(g'g)$. Этот $\mathbb{C}G$-модуль называется *индуцированным модулем* и обозначается через $\operatorname{Ind}_H^G V$. Соответствующее линейное представление группы G называется *индуцированным представлением* и обозначается через $\operatorname{Ind}_H^G \rho$.

Упражнение 5. Доказать, что для любых $\mathbb{C}H$-модулей V и W имеет место G-изоморфизм $\operatorname{Ind}_H^G(V \oplus W) \cong \operatorname{Ind}_H^G V \oplus \operatorname{Ind}_H^G W$.

Упражнение 6. Доказать, что если H и K — подгруппы группы G, причем $K \subseteq H$, то для любого $\mathbb{C}K$-модуля V имеет место G-изоморфизм $\operatorname{Ind}_K^G V \cong \operatorname{Ind}_H^G \operatorname{Ind}_K^H V$.

Пример 1. Пусть $V = \mathbb{C}$ и ρ — тривиальное представление группы H. Тогда $\operatorname{Ind}_H^G V$ — это подпространство пространства $\mathbb{C}[G]$ функций на группе G, состоящее из всех функций, постоянных на каждом правом смежном классе группы G по подгруппе H. Поэтому $\operatorname{Ind}_H^G V$ можно отождествить с пространством $\mathbb{C}[H\backslash G]$ всех функций на множестве $H\backslash G$ правых смежных классов G по H.

Фактормножество $H\backslash G$ является однородным правым G-пространством (то есть множеством с транзитивным правым действием группы G), причем каждое однородное правое G-пространство изоморфно $H\backslash G$ при подходящем выборе подгруппы H (а именно, нужно взять в качестве H стабилизатор какой-нибудь точки). Представление группы G в пространстве функций на однородном правом G-пространстве $H\backslash G$ естественно изоморфно *квазирегулярному представлению* в пространстве $\mathbb{C}X$, где $X = G/H$. Изоморфизм $\mathbb{C}X \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[H\backslash G]$ получается так: смежный класс gH переходит в функцию, равную единице на Hg^{-1} и нулю на остальных правых смежных классах.

Упражнение 7. Пусть X — однородное правое G-пространство. Доказать, что значение характера соответствующего квазирегулярного представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных (относительно g) точек в X.

Заметим, что для любого $\mathbb{C}H$-модуля V пространство V-значных функций на $X = H\backslash G$ изоморфно индуцированному модулю $\operatorname{Ind}_H^G V$ (хотя и не канонически). Пусть для каждого смежного класса $x \in X$ выбран его представитель $g_x \in G$. Поставим в соответствие каждому элементу

$F \in \operatorname{Ind}_H^G V$ (рассматриваемому как функция на группе G) функцию $f : X \to V$, заданную равенством $f(x) = F(g_x)$. Легко видеть, что это соответствие устанавливает изоморфизм пространства $\operatorname{Ind}_H^G V$ с пространством V-значных функций на X, действие группы G на котором задается формулой $(gf)(x) = g_x g g_{xg}^{-1} f(xg)$. Отсюда, в частности, следует, что $\dim \operatorname{Ind}_H^G V = [G : H] \dim V$.

Для вычисления числа сплетения с индуцированным представлением очень полезна следующая теорема.

Теорема 11 (Двойственность Фробениуса)**.** *Пусть G — группа, H — её подгруппа, U — левый $\mathbb{C}G$-модуль, а V — левый $\mathbb{C}H$-модуль. Обозначим U, рассматриваемый как $\mathbb{C}H$-модуль, через $\operatorname{Res}_H^G U$. Тогда имеет место канонический изоморфизм*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, \operatorname{Ind}_H^G V) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\operatorname{Res}_H^G U, V).$$

Доказательство. Пусть $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, \operatorname{Ind}_H^G V)$. Построим отображение $\hat{\psi} : \operatorname{Res}_H^G U \to V$ по формуле $\hat{\psi}(u) = (\psi(u))(e)$, где через e обозначена единица группы G (элементы пространства $\operatorname{Ind}_H^G V$ мы воспринимаем как функции на группе G).

Пусть $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\operatorname{Res}_H^G U, V)$. Построим отображение $\check{\varphi} : U \to \operatorname{Ind}_H^G V$ по формуле $(\check{\varphi}(u))(g) = \varphi(gu)$.

Проверьте сами, что отображение $\psi \mapsto \hat{\psi}$ переводит $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, \operatorname{Ind}_H^G V)$ в $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\operatorname{Res}_H^G U, V)$, а отображение $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ переводит $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}H}(\operatorname{Res}_H^G U, V)$ в $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, \operatorname{Ind}_H^G V)$, а также то, что эти отображения являются взаимно обратными. □

Пример 2. Пусть $V = \operatorname{Ind}_H^G \mathbb{C}$, $W = \operatorname{Ind}_K^G \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ рассматривается как тривиальный $\mathbb{C}H$-модуль ($\mathbb{C}K$-модуль). Тогда

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}K}(V, \mathbb{C}) = \{f : H\backslash G \to \mathbb{C} \mid (\forall h \in K)\ f(xh) = f(x)\} \cong \mathbb{C}[H\backslash G/K],$$

где через $H\backslash G/K$ обозначено множество *двойных смежных классов*, то есть множеств вида HgK. Таким образом, мы снова получили формулу для числа сплетения квазирегулярных представлений.

Множество $H\backslash G/K$ естественно отождествляется с множеством орбит правого действия K на $H\backslash G$, с множеством орбит левого действия H на G/K, и с множеством орбит правого действия G на $(H\backslash G) \times (G/K)$, заданного формулой $(x, y)g = (xg, g^{-1}y)$. Последнее множество находится в биекции с множеством орбит естественного правого действия G на $(H\backslash G) \times (K\backslash G)$ (эта биекция возникает из биекции $Kg \mapsto g^{-1}K$ между $K\backslash G$ и G/K).

Таким образом, число сплетения между квазирегулярными представлениями, отвечающими однородным правым G-пространствам X и Y, равно числу орбит группы G на множестве $X \times Y$ (или числу орбит группы H на множестве Y, или числу орбит группы K на множестве X, где H — стабилизатор некоторого элемента множества X, а K — стабилизатор некоторого элемента множества Y). Более того, орбитам отвечает некоторый базис в пространстве сплетающих операторов (см. лекцию 6). Сейчас мы обобщим эту конструкцию для сплетающих операторов между произвольными индуцированными представлениями.

Пусть H, K — подгруппы группы G, V — некоторый левый $\mathbb{C}H$-модуль, а W — некоторый левый $\mathbb{C}K$-модуль. Пространство $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ имеет естественную структуру левого $\mathbb{C}K$-модуля и правого $\mathbb{C}H$-модуля. Обозначим через $L_{VW}(G)$ пространство всех функций $F : G \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, удовлетворяющих условию $F(kgh) = kF(g)h$ для любых $k \in K, g \in G, h \in H$.

Определим для каждого $F \in L_{VW}(G)$ следующее линейное отображение из $\operatorname{Ind}_H^G V$ в $\operatorname{Ind}_K^G W$:

$$\hat{F}f(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{g_1 \in G} F(g_1) f(g_1^{-1} g),$$

где $f : G \to V$ — произвольный элемент $\operatorname{Ind}_H^G V$. Ясно, что $\hat{F}f \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Ind}_H^G V, \operatorname{Ind}_K^G W)$.

Теорема 12. *Отображение $F \mapsto \hat{F}$ задает изоморфизм линейных пространств $L_{VW}(G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(\operatorname{Ind}_H^G V, \operatorname{Ind}_K^G W)$.*

Доказательство. Для каждого $\mathcal{F} : \operatorname{Ind}_H^G V \to \operatorname{Ind}_K^G W$ положим

$$\check{\mathcal{F}}(g)v = \mathcal{F}(f_v)(g),$$

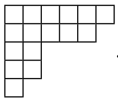
где $v \in V$, а $f_v \in \operatorname{Ind}_H^G V$ определено условием

$$f_v(g) = \begin{cases} gv, & \text{если } g \in H; \\ 0, & \text{если } g \notin H. \end{cases}$$

Проверьте сами, что $\check{\mathcal{F}} \in L_{VW}(G)$ и что отображения $F \mapsto \hat{F}$ и $\mathcal{F} \mapsto \check{\mathcal{F}}$ являются взаимно обратными. □

Представления симметрической группы

Пусть $G = S_n$ — группа перестановок. Напомню, что *разбиением* числа n называется неубывающая конечная последовательность $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ натуральных чисел, для которой $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$. Для каждого разбиения λ числа n рассмотрим соответствующую *диаграмму Юнга*, по определению состоящую из n квадратов, размещенных в k строк длин $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$; строки нумеруются сверху вниз и выровнены по левому краю. Так, разбиению $(6, 5, 2, 2, 1)$ числа 16 отвечает диаграмма

.

Диаграмму Юнга мы будем обозначать той же буквой, что и соответствующее разбиение.

Таблицей Юнга формы λ называется диаграмма Юнга λ, все клеточки которой заполнены числами от 1 до n. Для каждой диаграммы Юнга λ выберем таблицу Юнга T_λ формы λ. Пусть $R_\lambda \subseteq G$ — подгруппа, состоящая из всех таких перестановок σ, что для любого $i = 1, \ldots, n$ число $\sigma(i)$ стоит в той же строке диаграммы T_λ, что и i. Аналогично, обозначим через C_λ подгруппу группы G, состоящую из всех таких перестановок σ, что для любого $i = 1, \ldots, n$ число $\sigma(i)$ стоит в том же столбце диаграммы T_λ, что и i. Рассмотрим тривиальный одномерный $\mathbb{C}R_\lambda$-модуль $\mathbb{C}_1$ и положим $U_\lambda = \operatorname{Ind}_{R_\lambda}^G \mathbb{C}_1$. Рассмотрим также одномерный $\mathbb{C}C_\lambda$-модуль $\mathbb{C}_\varepsilon$, в котором каждая перестановка из C_λ действует умножением на свой знак, и положим $W_\lambda = \operatorname{Ind}_{C_\lambda}^G \mathbb{C}_\varepsilon$.

Назовем *таблоидом* формы λ класс эквивалентности таблиц формы λ относительно перестановок чисел в строках таблицы (другими словами, таблоид — это разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$ на k подмножеств из $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ элементов). Таблоид, соответствующий таблице T, обозначим через $\overline{T}$. Множество таблоидов формы λ является однородным пространством над группой G. Обозначим его через X_λ. Ясно, что подгруппа R_λ — стабилизатор точки $\overline{T}_\lambda \in X_\lambda$. Поэтому $U_\lambda \simeq \mathbb{C}X_\lambda$ как $\mathbb{C}G$-модуль. Таким образом, с точностью до изоморфизма модуль U_λ не зависит от выбора таблицы T_λ. Далее мы будем отождествлять модуль U_λ с модулем $\mathbb{C}X_\lambda$.

Упражнение 8. Доказать, что с точностью до изоморфизма W_λ не зависит от выбора таблицы T_λ.

Пусть λ и μ — две диаграммы. Найдем необходимые условия для того, чтобы $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu) \neq 0$ (на самом деле эти условия окажутся и достаточными).

По теореме 12 пространство $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu)$ изоморфно пространству всех функций $F : G \to \mathbb{C}$, для которых верно тождество

$$F(\rho\sigma\tau) = \varepsilon(\rho)F(\sigma) \tag{1}$$

при $\rho \in C_\mu, \sigma \in G, \tau \in R_\lambda$. Из условия (1) следует, что F постоянна на левых смежных классах по подгруппе R_λ, то есть F можно рассматривать как функцию на $G/R_\lambda = X_\lambda$, удовлетворяющую условию $F(\rho\overline{T}) = \varepsilon(\rho)T$ для любых $\overline{T} \in X_\lambda, \rho \in C_\mu$. Но такая функция равна нулю для любого таблоида $\overline{T}$, у которого в одной строке есть два элемента одного столбца таблицы T_μ.

Предположим, что F не равна тождественно нулю, то есть найдется таблоид $\overline{T}$ формы λ, у которого в каждую строку попадает не более чем по одному элементу из каждого столбца таблицы T_μ.

Тогда, очевидно, выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered} \lambda_1 \leqslant \mu_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2, \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

В совокупности эти условия обозначаются так: $\lambda \leqslant \mu$. Легко видеть, что отношение $\leqslant$ задает на множестве n-клеточных диаграмм Юнга (или разбиений числа n) частичный порядок. Ясно, что этот порядок слабее лексикографического, то есть если $\lambda \leqslant \mu$, то $\lambda \underset{\text{lex}}{\leqslant} \mu$. В частности, если $\lambda \underset{\text{lex}}{\geqslant} \mu$, то $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu) = 0$.

Упражнение 9. Доказать, что если $\lambda \leqslant \mu$, то $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu) \neq 0$.

Теорема 13. $\dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\lambda) = 1$.

Доказательство. Как мы уже убедились, пространство $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\lambda)$ изоморфно пространству таких функций F на X_λ, что $F(\rho\overline{T}) = \varepsilon(\rho)T$ для любых $\overline{T} \in X_\lambda, \rho \in C_\lambda$. Нетрудно убедиться, что если $\overline{T}$ — такой таблоид из X_λ, что в любой его строке не более чем по одному элементу из каждого столбца таблицы T_λ, то в каждой его строке ровно по одному элементу из каждого столбца таблицы T_λ, то есть $\overline{T} \in C_\lambda \overline{T}_\lambda$. Пусть F_0 — функция на X_λ, заданная формулой

$$F(\overline{T}) = \begin{cases} \varepsilon(\rho), & \text{если } \overline{T} = \rho \overline{T}_\lambda \text{ для некоторого } \rho \in C_\lambda; \\ 0, & \text{если } \overline{T} \in X_\lambda \setminus C_\lambda \overline{T}_\lambda. \end{cases}$$

Ясно, что функция F_0 определена корректно и любая функция F, удовлетворяющая нашим условиям, пропорциональна F_0. $\square$

Следствие 11. *У $\mathbb{C}G$-модулей U_λ и W_λ существуют однозначно определеные изоморфные простые подмодули $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ и $\tilde{V}_\lambda \subseteq W_\lambda$. Кроме того $V_\lambda \not\simeq V_\mu$ при $\lambda \neq \mu$.*

Доказательство. То, что изоморфные простые подмодули V_λ и $\tilde{V}_\lambda$ существуют и определены однозначно, следует из одномерности $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\lambda)$. Если $V_\lambda \simeq V_\mu$, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\lambda, W_\mu) \neq 0$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_\mu, W_\lambda) \neq 0$. Но тогда $\lambda \leqslant \mu$ и $\mu \leqslant \lambda$, следовательно, $\lambda = \mu$. $\square$

Следствие 12. *Любой простой $\mathbb{C}G$-модуль изоморфен одному из V_λ.*

Доказательство. Все V_λ попарно неизоморфны и число их равно числу разбиений числа n. Поскольку классов сопряженности в симметрической группе столько же (класс сопряженности определяется набором длин циклов, то есть разбиением числа n), то никаких других простых $\mathbb{C}G$-модулей не бывает. $\square$

Можно воспользоваться явным видом гомоморфизмов между U_λ и W_λ, чтобы получить линейные образующие пространств V_λ и $\tilde{V}_\lambda$. Например, ясно, что V_λ — образ любого ненулевого гомоморфизма $W_\lambda \to U_\lambda$. Каждый такой гомоморфизм отвечает, как мы знаем из теоремы 12, функции $F : G \to \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию $F(\rho\sigma\tau) = F(\sigma)\varepsilon(\tau)$ для любых $\rho \in R_\lambda, \sigma \in G, \tau \in C_\lambda$. Возьмем в качестве такой функции $F(\sigma) = F_0(\sigma^{-1} R_\lambda$, где функция F_0 определена в доказательстве теоремы 13. Применяя гомоморфизм $\hat{F}$ к элементам W_λ, мы получаем следующий результат:

Утверждение 6. *Для каждой таблицы T формы λ рассмотрим элемент*

$$P(T) = \sum_{\sigma \in C(T)} \varepsilon(\sigma)\sigma\overline{T} \in \mathbb{C}X_\lambda = U_\lambda,$$

где $C(T)$ — подгруппа всех перестановок, сохраняющих столбцы таблицы T. Элементы $P(T)$ линейно порождают подпространство $V_\lambda \subseteq U_\lambda$.

Замечание. Ясно, что достаточно рассматривать $P(T)$ для таких таблиц T, у которых элементы каждого столбца возрастают сверху вниз. Оказывается, однако, что можно ограничиться $P(T)$ для таких таблиц T, у котрых ещё и элементы каждой строки возрастают слева направо. Такие таблицы называются *стандартными*. Элементы $P(T)$, для которых T — стандартная таблица, составляют базис пространства V_λ. Попробуйте доказать это сами.

Приведем ещё одну явную конструкцию $\mathbb{C}G$-модуля V_λ. Рассмотрим следующие элементы групповой алгебры $\mathbb{C}G$:

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in R_\lambda} \sigma; \qquad b_\lambda = \sum_{\sigma \in C_\lambda} \varepsilon(\sigma)\sigma; \qquad c_\lambda = b_\lambda \cdot a_\lambda; \qquad \tilde{c}_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda.$$

Легко видеть, что имеют место изоморфизмы $\mathbb{C}G$-модулей: $\mathbb{C}Ga_\lambda \simeq U_\lambda$ и $\mathbb{C}Gb_\lambda \simeq W_\lambda$. Кроме того, гомоморфизм $U_\lambda \to W_\lambda$, отвечающий функции $F_0(g)$ из доказательства теоремы 13, соответствует гомомрфизму $\mathbb{C}Ga_\lambda \to \mathbb{C}Gb_\lambda$, переводящему xa_λ в $xa_\lambda b_\lambda$. Аналогично, единственный (с точностью до пропорциональности) ненулевой гомоморфизм $\mathbb{C}Gb_\lambda \to \mathbb{C}Ga_\lambda$ (отвечающий функции $F_0(g^{-1})$) имеет вид $yb_\lambda \mapsto yb_\lambda a_\lambda$. Поэтому подмодули $\tilde{V}_\lambda \subseteq W_\lambda$ и $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ соответствуют образам этих гомоморфизмов, то есть левым идеалам $\mathbb{C}G\tilde{c}_\lambda$ и $\mathbb{C}Gc_\lambda$.

Элемент c_λ называется *симметризатором Юнга*. Легко проверить, что $c_\lambda^2 = m_\lambda c_\lambda$, где m_λ — некоторая константа, зависящая только от диаграммы λ.

Упражнение 10. Пусть V — произвольный $\mathbb{C}G$-модуль. Доказать, что кратность вхождения в V простого модуля V_λ равна $\dim(c_\lambda V)$.

Двойственность Шура–Вейля

Рассмотрим представление τ симметрической группы S_n в пространстве $M = U^{\otimes n}$, где $U = \mathbb{C}^k$ (элемент $\sigma \in S_n$ действует на разложимые тензоры по формуле $\tau(\sigma)(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(n)}$). В том же пространстве задано представление ρ группы обратимых линейных операторов $GL(U) = GL_k(\mathbb{C})$, являющееся n-й тензорной степенью тождественного представления (элемент $g \in GL_k(\mathbb{C})$ действует на разложимые тензоры по формуле $\rho(g)(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = (gu_1) \otimes \dots \otimes (gu_n)$). Ясно, что действия этих двух групп перестановочны, то есть $\rho(g) \in \mathrm{End}(\tau)$ для любого $g \in GL_k(\mathbb{C})$, и $\tau(\sigma) \in \mathrm{End}(\rho)$ для любого $\sigma \in S_n$.

Обозначим через A линейную оболочку операторов вида $\tau(\sigma)$ для всех $\sigma \in S_n$, а через B — линейную оболочку операторов вида $\rho(g)$ для всех $g \in GL_k(\mathbb{C})$. Ясно, что A и B — подалгебры алгебры $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$.

Теорема 14. *M является полупростым A-модулем и полупростым B-модулем, причём $\mathrm{End}_A(M) = B$ и $\mathrm{End}_B(M) = A$.*

Доказательство. То, что M полупрост как A-модуль, следует из теоремы Машке. Докажем, что $\mathrm{End}_A(M) = B$.

Пространство $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ естественно изоморфно n-й тензорной степени пространства $W = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$, при этом подалгебра $\mathrm{End}_A(M) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ соответствует подпростанству $TS^n(W)$ симметрических тензоров (поскольку условие перестановочности с оператором $\tau(\sigma)$ соответствует инвариантности относительно перестановки σ сомножителей в тензорном произведении $W \otimes \dots \otimes W$), а подпространство $B \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ соответствует подпространству $L \subseteq W \otimes \dots \otimes W$, натянутому на разложимые тензоры вида $g \otimes \dots \otimes g$, где $g \in GL_k(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$. Докажем, что $L = TS^n(W)$.

Мы знаем, что $TS^n(W)^* \simeq S^n(W^*)$, а симметрическая степень $S^n(W^*)$ естественно изоморфна пространству однородных полиномиальных функций степени n на пространстве W. Заметим, что если многочлен на W обращается в нуль на любой невырожденной матрице, то он тождественно равен нулю. (Действительно, пусть f — такой многочлен. Рассмотрим произвольную матрицу $C \in W$. Тогда $f(E+tC)$ —многочлен от t, равный нулю при достаточно малых t, а значит, тождественно равный нулю.) Поэтому аннулятор пространства L равен нулю и $L = TS^n(W)$. Следовательно, $\mathrm{End}_A(M) = B$.

По теореме о двойном централизаторе $\mathrm{End}_B(M) = A$. Полупростота M как B-модуля тоже следует из равенства $\mathrm{End}_A(M) = B$ и из полупростоты M как A-модуля. Действительно, алгебра эндоморфизмов полупростого модуля над полем $\mathbb{C}$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр. $\square$

Следствие 13. *Представление ρ группы $GL_k(\mathbb{C})$ вполне приводимо.*

Следствие 14. *Пусть ρ_i — все неизоморфные неприводимые представления группы $GL_k(\mathbb{C})$, входящие в представление ρ в качестве прямого слагаемого. Неприводимые представления группы S_n, входящие в представление τ в качестве прямого слагаемого, находятся во взаимно однозначном соответствии с ρ_i. При этом размерность представления ρ_i равна кратности вхождения в τ соответствующего неприводимого представления τ_i группы S_n и наоборот.*

Доказательство. Пусть $U_1, \dots, U_r$ — простые B-модули, отвечающие неприводимым представлениям $\rho_1, \dots, \rho_r$. Разложим M в сумму изотипических B-подмодулей:

$$M \simeq \underbrace{U_1 \oplus \dots U_1}_{n_1} \oplus \dots \oplus \underbrace{U_r \oplus \dots \oplus U_r}_{n_r} \simeq U_1 \otimes V_1 \oplus \dots \oplus U_r \otimes V_r, \tag{2}$$

где $V_i = \mathbb{C}^{n_i}$. При этом $A = \mathrm{End}_B(M) \simeq M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$, то есть V_i являются простыми A-модулями. Мы полагаем τ_i равным представлению группы S_n в V_i. Ясно, что эти представления попарно неизоморфны. Утверждение о кратностях и размерностях очевидно из разложения (2). $\square$

Воспользуемся теперь нашими знаниями о представлениях симметрической группы для того, чтобы явно построить представления полной линейной группы. Напомню, что для каждой диаграммы Юнга λ мы выбрали таблицу Юнга T_λ формы λ, исходя из которой построили симметризатор Юнга $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$, где

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in R_\lambda} \sigma, \qquad b_\lambda = \sum_{\sigma \in C_\lambda} \varepsilon(\sigma)\sigma,$$

$R_\lambda \subseteq S_n$ — подгруппа, сохраняющая строки таблицы T_λ, а C_λ — подгруппа, сохраняющая столбцы таблицы T_λ. От выбора таблицы T_λ в действительности ничего не зависит, поэтому мы предположим, что в первой её строке написаны по порядку числа от 1 до λ_1, во второй — от $\lambda_1 + 1$ до $\lambda_1 + \lambda_2$, и так далее.

Поскольку правое умножение на b_λ является единственным, с точностью до пропорциональности, гомоморфизмом $\mathbb{C}S_n$-модулей $\mathbb{C}S_n a_\lambda \to \mathbb{C}S_n b_\lambda$, то правое умножение на $b_\lambda a_\lambda b_\lambda$ задает гомоморфизм $\mathbb{C}S_n a_\lambda \to \mathbb{C}S_n b_\lambda$, пропорциональный ему. Легко видеть, что коэффициент пропорциональности — ненулевое целое число (поскольку правое умножение на a_λ задает изоморфизм простого подмодуля $V_\lambda = \mathbb{C}S_n a_\lambda b_\lambda \subseteq \mathbb{C}S_n b_\lambda$ на простой подмодуль $\tilde{V}_\lambda = \mathbb{C}S_n b_\lambda a_\lambda \subseteq \mathbb{C}S_n a_\lambda$, а правое умножение на b_λ задает изоморфизм $\tilde{V}_\lambda$ на V_λ). Обозначим это число через $m(\lambda)$. Мы имеем $x a_\lambda b_\lambda a_\lambda b_\lambda = m(\lambda) x a_\lambda b_\lambda$ для любого $x \in \mathbb{C}S_n$. В частности, при $x = e$ мы получаем $c_\lambda^2 = m(\lambda) c_\lambda$.

Пусть μ — произвольная диаграмма Юнга. Обозначим соответствующие неприводимое представление симметрической группы (и её групповой алгебры) в пространстве V_μ через τ_μ. Пространство $\mathrm{End}_\mathbb{C}(V_\mu)$ является левым $\mathbb{C}S_n$-модулем ($x \in \mathbb{C}S_n$ действует левым умножением на $\tau_\mu(x)$). Как $\mathbb{C}S_n$-модуль $\mathrm{End}_\mathbb{C}(V_\mu)$ изоморфен $n_\mu V_\mu$, где $n_\mu = \dim V_\mu$. Отображение $\tau_\mu : \mathbb{C}S_n \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(V_\mu)$ является гомоморфизмом левых $\mathbb{C}S_n$-модулей. Поэтому $\tau_\mu(\mathbb{C}S_n c_\lambda) = 0$ при $\lambda \neq \mu$ (так как простой модуль $V_\lambda = \mathbb{C}S_n c_\lambda \not\simeq V_\mu$). В частности, $\tau_\mu(c_\lambda) = 0$ при $\lambda \neq \mu$. В то же время, очевидно, $\tau_\lambda(c_\lambda) \neq 0$ (так как $c_\lambda^2 = m(\lambda) c_\lambda \neq 0$). Из того, что $\mathbb{C}S_n c_\lambda$ является простым модулем, следует, что ранг оператора $\tau_\lambda(c_\lambda)$ равен 1. Действительно, $\dim \tau_\lambda(\mathbb{C}S_n c_\lambda) = \dim \tau_\lambda(\mathbb{C}S_n)\tau_\lambda(c_\lambda) = \dim \mathrm{End}_\mathbb{C}(V_\lambda)\tau_\lambda(c_\lambda) = \mathrm{rk}\,\tau_\lambda(c_\lambda) \dim V_\lambda$. Выберем c_λ в качестве первого базисного вектора пространства V_λ и дополним его базисом пространства $\mathrm{Ker}\,\tau_\lambda(c_\lambda) \not\ni c_\lambda$ до базиса пространства V_λ. В этом базисе оператор $\tau_\lambda(c_\lambda)$ суть проектор на первый базисный вектор, умноженный на $m(\lambda)$.

Вернемся теперь к разложению (2). Поскольку $A = \tau(\mathbb{C}S_n)$, то мы можем рассматривать входящие в него простые A-модули V_i как $\mathbb{C}S_n$-модули. Применяя к разложению (2) $\tau(c_\lambda)$, мы получаем

$$\tau(c_\lambda)M \simeq U_\lambda \otimes c_\lambda \subseteq U_\lambda \otimes V_\lambda,$$

где U_λ — тот из простых B-модулей U_i, входящих в разложение (2), для которого $V_i \simeq V_\lambda$ (если таковой найдется; в противном случае $\tau(c_\lambda)M = 0$ и $U_\lambda = 0$). Поскольку каждый из V_i изоморфен некоторому V_λ, то каждый простой B-модуль, входящий в M, реализуется как $\tau(c_\lambda)M$ для некоторой диаграммы λ. Обозначим через ρ_λ представление группы $GL_k(\mathbb{C})$ в пространстве U_λ. Мы видим, что неприводимые представления группы $GL_k(\mathbb{C})$, входящие в разложение представления ρ, — это те ρ_λ, для которых $\tau(c_\lambda)M \neq 0$.

Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — стандартный базис пространства U. Тензоры вида $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$ составляют базис пространства M. Поставим в соответствие каждому такому базисному тензору таблицу формы λ: в первую строку напишем $i_1, i_2, \ldots, i_{\lambda_1}$, во вторую — $i_{\lambda_1+1}, \ldots, i_{\lambda_2}$, и так далее. Отметим, что теперь мы рассматриваем таблицы, заполненные числами от 1 до k с повторениями, а не числами от 1 до n без повторений, как при изучении представлений симметрической группы. Таким образом, мы установили изоморфизм пространства M с пространством, базис которого состоит из всех таблиц формы λ.

Применение симметризатора Юнга c_λ к базисному тензору в терминах таблиц выглядит так: сначала мы антисимметризуем таблицу по столбцам, а потом симметризуем по строкам. Ясно, что если в исходной таблице в каком-нибудь столбце были повторяющиеся числа, то уже результат антисимметризации равен нулю. В частности, если в диаграмме Юнга более k строк, то образ применения $\tau(c_\lambda)M = 0$, то есть $\rho_\lambda = 0$. С другой стороны, если число строк в диаграмме λ не превосходит k, то применение симметризатора Юнга c_λ к таблице, у которой в первой строчке стоят единицы, во второй — двойки, и так далее, дает ненулевой результат (действительно, исходная таблица входит туда с коэффициентом $\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_r!$). Отсюда следует

Теорема 15. *В разложение представления τ группы S_n в пространстве $M = (\mathbb{C}^k)^{\otimes n}$ входят с ненулевой кратностью те и только те представления τ_λ, у которых диаграмма λ имеет не более k строк. Соответственно, неприводимые представления ρ_λ группы $GL_k(\mathbb{C})$, входящие в разложение представления ρ в пространстве M, нумеруются n-клеточными диаграммами Юнга не более чем из k строк.*

При более внимательном рассмотрении действия симметризатора Юнга на таблицы получается следующий результат (я приведу его без доказательства):

Теорема 16. *Назовем таблицу полустандартной, если в каждом столбце у неё числа возрастают, а в каждой строке — не убывают. Если применить c_λ ко всевозможным полустандартным таблицам, то получится базис в пространстве неприводимого представления ρ_λ группы $GL_k(\mathbb{C})$.*

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие представления полной линейной группы можно разложить в сумму неприводимых представлений вида ρ_λ.

Определение 13. Конечномерное представление группы $GL_k(\mathbb{C})$ называется *полиномиальным*, если все его матричные элементы являются многочленами от коэффициентов матрицы $g \in GL_k(\mathbb{C})$.

Конечномерное представление группы $GL_k(\mathbb{C})$ называется *рациональным*, если все его матричные элементы являются многочленами от коэффициентов матрицы $g \in GL_k(\mathbb{C})$ и $(\det g)^{-1}$.

С помощью тензорного умножения на подходящую степень одномерного представления $\det$ любое рациональное представление сводится к полиномиальному. Поэтому достаточно изучать полиномиальные представления.

Теорема 17. *Любое полиномиальное представление группы $GL_k(\mathbb{C})$ является вполне приводимым (тем самым, то же верно для любого рационального представления этой группы). Любое неприводимое полиномиальное представление группы $GL_k(\mathbb{C})$ изоморфно представлению вида ρ_λ для некоторой диаграммы Юнга не более чем из k строк (число клеток — любое).*

Доказательство. Заметим, что представление ξ является вполне приводимым тогда и только тогда, когда двойственное представление ξ^* является вполне приводимым. Пространство любого представления разлагается в сумму циклических подпространств (то есть порожденных орбитой одного вектора). Кроме того, любое подпредставление представления ξ^* изоморфно двойственному к некоторому факторпредставлению представления ξ. Поэтому достаточно доказать теорему в случае, когда пространство представления ξ^* является циклическим.

Итак, пусть V — пространство представления ξ, и пусть $v^* \in V^*$ — циклический вектор. Рассмотрим отображение $v \mapsto f_v$ пространства V в пространство полиномиальных функций на $GL_k(\mathbb{C})$, заданное формулой $f_v(g) = (v^*, \xi(g)v) = (\xi^*(g^{-1})v^*, v)$. Ясно, что это вложение, причем согласованное с действием группы (на полиномиальных функциях мы рассматриваем правое регулярное представление группы: $(g_1 f)(g) = f(gg_1)$). Поэтому достаточно доказать, что правое регулярное представление полной линейной группы на полиномиальных функциях вполне приводимо, и что все его неприводимые подпредставления изоморфны некоторым ρ_λ. Это следует из того, что пространство полиномиальных функций на полной линейной группе изоморфно симметрической алгебре $S((U \otimes U^*)^*) \simeq S(U \otimes U^*) \simeq S(U^k)$, причем $S^m(U^k) \simeq \bigoplus\limits_{m_1+\dots+m_k=m} S^{m_1}U \otimes \dots \otimes S^{m_k}U$ (где, напомню, $U = \mathbb{C}^k$; все изоморфизмы согласованы с действием группы $GL_k(\mathbb{C})$). Все слагаемые в последнем разложении вкладываются в пространство $U^{\otimes m}$, представление $GL_k(\mathbb{C})$ в котором вполне приводимо и раскладывается в сумму неприводимых вида ρ_λ. $\square$

Как и для конечных групп, у представлений полной линейной группы бывают характеры. Отметим, что характер полиномиального (или рационального) представления полностью определяется своими значениями на диагональных матрицах. Действительно, всякая диагонализуемая матрица сопряжена диагональной. Следовательно, значение характера на диагонализуемой матрице определяется набором её собственных чисел. Вместе с тем диагонализуемые матрицы плотны во множестве всех матриц. Поэтому характером полиномиального представления ξ обычно называют многочлен $\chi_\xi(x_1, \dots, x_k) = \operatorname{tr} \xi(\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_k))$. Ясно, что этот многочлен — симметрический.

Используя конструкцию представления ρ_λ через симметризатор Юнга, можно вычислить его характер $\chi_\lambda(x_1, \dots, x_k)$ (впрочем, путь до этого неблизкий). Я приведу ответ без доказательства.

Итак, пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ — разбиение числа n, причем $r \leqslant k$. Положим $\lambda_i = 0$ при $r < i \leqslant k$. Тогда имеет место следующая *формула Вейля для характера неприводимого представления* ρ_λ:

$$\chi_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+k-1} & x_2^{\lambda_1+k-1} & \dots & x_k^{\lambda_1+k-1} \\ x_1^{\lambda_2+k-2} & x_2^{\lambda_2+k-2} & \dots & x_k^{\lambda_2+k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{\lambda_k} & x_2^{\lambda_k} & \dots & x_k^{\lambda_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \\ x_1^{k-2} & x_2^{k-2} & \dots & x_k^{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}.$$