Независимый Московский Университет

Алгебра – II

Второй курс, осенний семестр 1996/97 г.
Лекции 4–6

Простые группы. Теорема Жордана–Гёльдера

В прошлом семестре, когда мы изучали модули над кольцами, мы использовали две простые теоремы: об изоморфизме и о соответствии. Эти теоремы имеют свои аналоги для групп.

Определение 1. Пусть G — группа, $K \subset G$ — подгруппа и $g \in G$ — произвольный элемент. Говорят, что g *нормализует* K, если $gK = Kg$. Множество всех элементов группы G, нормализующих подгруппу K, называется ее *нормализатором* и обозначается $N_G(K)$.

Упражнение 1. Доказать, что для любой подгруппы $K \subset G$ ее нормализатор $N_G(K)$ является подгруппой в G, содержащей K, причем $K \lhd N_G(K)$ и любая подгруппа $H \subseteq G$, для которой $K \lhd H$, содержится в $N_G(K)$.

Теорема 1 (об изоморфизме)**.** *Пусть H, K — подгруппы группы G, причем $H \subseteq N_G(K)$. Тогда $(H \cap K) \lhd H$, $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ — подгруппа группы G, $K \lhd HK$, причем отображение $H/(H \cap K) \to HK/K$, переводящее каждый смежный класс $h(H \cap K)$ в hK, является изоморфизмом групп.*

Теорема 2 (о соответствии)**.** *Пусть G — группа, $K \lhd G$. Для любой подгруппы $H \subseteq G$, содержащей K, обозначим через $\overline{H}$ ее образ при канонической проекции $G \to G/K$. Тогда отображение $H \mapsto \overline{H}$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между множеством всех подгрупп группы G, содержащих K, и множеством всех подгрупп группы $\overline{G} = G/K$. Кроме того, подгруппа $H \subseteq G$, содержащая K, нормальна в G тогда и только тогда, когда $\overline{H} \lhd \overline{G}$, и в этом случае $G/H \simeq \overline{G}/\overline{H}$.*

Упражнение 2. Докажите эти теоремы.

Определение 2. Группа G называется *простой*, если она не единичная и у нее нет нетривиальных нормальных подгрупп (то есть нормальных подгрупп, отличных от $\{e\}$ и G).

Определение 3. *Нормальным рядом* группы G называется любая последовательность вложенных подгрупп $G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_n = \{e\}$, для которой G_{i+1} является нормальной подгруппой группы G_i для любого $i = 1, \dots, n-1$. Факторгруппы G_i/G_{i+1} называются *факторами нормального ряда*.

Нормальный ряд называется *композиционным рядом*, если все его факторы являются простыми группами. Факторы композиционного ряда называются *композиционными факторами*.

Упражнение 3. Доказать, что любой нормальный ряд конечной группы (без повторяющихся членов) можно уплотнить до композиционного ряда.

Теорема 3 (Жордана–Гёльдера)**.** *Пусть у группы G есть композиционный ряд. Тогда любые два композиционных ряда группы G имеют одинаковую длину, а их композиционные факторы совпадают (с точностью до изоморфизма и порядка следования).*

Упражнение 4. Доказать теорему Жордана–Гёльдера. (Указание: см. доказательство аналогичной теоремы для модулей).

Разрешимые и нильпотентные группы

Определение 4. Группа G называется *разрешимой*, если у нее есть нормальный ряд, все факторы которого абелевы.

Ясно, что конечная группа является разрешимой тогда и только тогда, когда все ее композиционные факторы изоморфны $\mathbb{Z}_{p_i}$ для некоторых простых чисел p_i.

Определение 5. Пусть G — группы, $g, h \in G$. Их *коммутатором* называется элемент $(g,h) = g^{-1}h^{-1}gh$. Подгруппа группы G, порожденная всеми коммутаторами, называется ее *коммутантом* или *производной группой* и обозначается (G,G) или G'. Последовательность подгрупп $G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq \dots$ называется *рядом коммутантов* или *производным рядом* группы G.

Коммутатор элементов g и h измеряет некоммутативность их произведения. Действительно, $gh = hg \cdot (g,h)$.

Упражнение 5. Доказать, что производный ряд группы G является нормальным рядом, а все его факторы — абелевы группы.

Упражнение 6. Доказать, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда $G^{(n)} = \{e\}$ для некоторого натурального числа n.

Определение 6. Пусть H — подгруппа группы G. Обозначим через (G,H) подгруппу, порожденную всеми коммутаторами вида (g,h), где $g \in G$ и $h \in H$. Положим $G_1 = G$, $G_{n+1} = (G, G_n)$. Последовательность подгрупп $G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \ldots$ называется *нижним центральным рядом* группы G.

Упражнение 7. Доказать, что нижний центральный ряд группы G является нормальным рядом, а все его факторы — абелевы группы. Более того, $G_n \lhd G$ для любого n, а образ подгруппы G_n при канонической проекции $G \to G/G_{n+1}$ является центром группы G/G_{n+1}.

Определение 7. Группа G называется *нильпотентной*, если для некоторого n соответствующий член нижнего центрального ряда G_n равен $\{e\}$.

Упражнение 8. Пусть $\Bbbk$ — любое поле. Обозначим через B_n группу невырожденных верхнетреугольных матриц из $M_n(\Bbbk)$, а через N_n — ее подгруппу, состоящую из всех унитреугольных матриц (то есть с единицами по диагонали). Доказать, что группа B_n разрешима, а группа N_n нильпотентна.

Силовские подгруппы

Напомню, что если группа G действует на конечном множестве X, то имеет место следующая *формула орбит*:

$$|X| = \sum_{\bar{x} \in G\backslash X} (G : G_x),$$

где через $G\backslash X$ обозначено множество орбит действия G на X, через G_x обозначен стабилизатор точки x, а при суммировании мы берем по одному представителю из каждой орбиты.

Рассмотрим действие конечной группы G на себе сопряжениями. Орбиты этого действия — классы сопряженности. Формула орбит дает нам *формулу классов*:

$$|G| = \sum_{x \in C} (G : G_x) = |Z(G)| + \sum_{x \in C'} (G : G_x),$$

где через $Z(G)$ обозначен центр группы G, через C — множество представителей различных классов сопряженных элементов, а через C' — подмножество множества C, отвечающее классам, состоящим более чем из одного элемента.

Определение 8. Пусть p — простое число. Назовем *p-группой* любую конечную группу, порядок которой является степенью p. Назовем подгруппу $H \subseteq G$ *p-подгруппой*, если она является p-группой. Подгруппа H называется *силовской* p-подгруппой, если ее порядок — максимальная степень p, делящая порядок группы G.

Теорема 4. *Пусть G — конечная группа, а p — простое число. Тогда в G существует силовская p-подгруппа.*

Доказательство. Отметим, прежде всего, что для абелевых групп имеется более сильное утверждение: каждая конечная абелева группа является прямой суммой своих силовских подгрупп (это следует из теоремы о классификации конечных абелевых групп). Поэтому для абелевых групп всё доказано.

Для доказательства теоремы в общем случае воспользуемся индукцией по числу элементов группы G. Если $|G| = 1$, то доказывать нечего. Пусть $|G| > 1$ и для всех групп меньших порядков теорема верна. Если p не делит $|G|$, то силовской p-подгруппой является единичная подгруппа. Пусть p делит $|G|$. Если в G есть собственная подгруппа, индекс которой взаимно прост с p, то применив к этой подгруппе предположение индукции, мы найдем силовскую p-подгруппу в G. Предположим, что индекс любой подгруппы группы G делится на p. Тогда из формулы классов следует, что $|Z(G)|$ тоже делится на p. Поскольку $Z(G)$ — абелева группа, то в ней есть силовская p-подгруппа H_Z. Ясно, что любая подгруппа $Z(G)$ нормальна в G. Рассмотрим факторгруппу

G/H_Z. Поскольку $|Z(G)|$ делится на p, то $|H_Z| > 1$ и $|G/H_Z| < |G|$. По предположению индукции в G/H_Z есть силовская p-подгруппа. Ее полный прообраз относительно канонической проекции $G \to G/H_Z$ является, очевидно, силовской p-подгруппой в G. □

Теорема 5. *Для всякой конечной группы G*

1. *каждая p-подгруппа содержится в некоторой силовской p-подгруппе;*
2. *все силовские p-подгруппы сопряжены;*
3. *число силовских p-подгрупп сравнимо с 1 по модулю p.*

Доказательство. Пусть P — некоторая силовская p-подгруппа группы G, а X — множество всех подгрупп вида gPg^{-1}. Все элементы множества X являются, очевидно, силовскими подгруппами, а X является G-орбитой (относительно действия сопряжением) во множестве всех силовских p-подгрупп. Стабилизатор точки $P \in X$ содержит P, поэтому его индекс в G (равный $|X|$) делит $(G : P)$. Следовательно, $|X|$ взаимно просто с p.

Пусть H — некоторая p-подгруппа группы G. Она действует сопряжениями на X, причем длина любой ее орбиты является степенью p. Поскольку $|X|$ не делится на p, то у действия H на X есть неподвижные точки. Пусть силовская p-подгруппа $S \in X$ неподвижна относительно действия H. Тогда $H \subseteq N_G(S)$, следовательно HS является подгруппой группы G. По теореме об изоморфизме $(HS : S) = (H : H \cap S)$ — степень p, то есть HS является p-подгруппой. Поскольку порядок S — максимальная степень p, делящая порядок G, то $HS = S$, то есть $H \subseteq S$.

В частности, если H — силовская p-подгруппа, то мы доказали, что она содержится в некоторой подгруппе, сопряженной с наперёд выбранной силовской p-подгруппой P. Так как порядок H равен порядку P, то H сопряжена P. Таким образом X — множество всех силовских p-подгрупп группы G.

Наконец, при $H = P$ мы получаем, что единственная неподвижная точка действия P на X сопряжениями — это P. Число элементов в любой другой P-орбите — степень числа p. Поэтому $|X| \equiv 1 \pmod p$. □

Полупрямое произведение групп

Определение 9. Пусть A и B — две группы, причем задан гомоморфизм $b \mapsto \hat{b}$ группы B в группу $\mathrm{Aut}(A)$. Введем на множестве $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ операцию умножения следующим образом: $(a, b)\cdot(a', b') = (a\cdot\hat{b}(a'), b\cdot b')$. Множество $A\times B$ с таким умножением называеся ***полупрямым произведением*** групп A и B и обозначается $A \rtimes B$.

Упражнение 9. Доказать, что полупрямое произведение групп является группой.

Упражнение 10. Пусть в группе G есть нормальная подгруппа N и такая подгруппа H, что $NH = G$ и $N \cap H = \{e\}$. Определим гомоморфизм $H \to \mathrm{Aut}(N)$ следующим образом: для $h \in H$ положим $\hat{h}(n) = hnh^{-1}$ для любого $n \in N$. Доказать, что отображение $(n, h) \mapsto nh$ задает изоморфизм $N \rtimes H \xrightarrow{\sim} G$.

Линейные представления групп и ассоциативных алгебр

Определение 10. Пусть G — группа. *Линейным представлением* группы G в линейном пространстве V над полем $\Bbbk$ называется такое отображение $\rho : G \to \operatorname{End}_{\Bbbk} V$, что $\rho(e) = \mathrm{id}_V$ и $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ для любых $g, h \in G$. Другими словами, линейное представление группы G в пространстве V — это гомоморфизм ее в группу $GL(V)$ обратимых линейных операторов в пространстве V. *Размерностью* представления ρ называется размерность пространства V.

Определение 11. Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над полем $\Bbbk$. *Линейным представлением* алгебры A в линейном пространстве V над полем $\Bbbk$ называется такое отображение $\tau : A \to \operatorname{End}_{\Bbbk} V$, что $\tau(1) = \mathrm{id}_V$, $\tau(xa) = x\tau(a)$, $\tau(a+b) = \tau(a)+\tau(b)$ и $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ для любого $x \in \Bbbk$ и для любых $a, b \in A$. Другими словами, линейное представление ассоциативной алгебры с единицей A в пространстве V — это гомоморфизм ее в ассоциативную алгебру с единицей $\operatorname{End}_{\Bbbk} V$ всех линейных операторов в пространстве V (под гомоморфизмом алгебр с единицей мы понимаем гомоморфизм алгебр, переводящий единицу в единицу).

Вместо слов “линейное представление” мы будем обычно говорить просто “представление”. Далее все определения мы будем давать только для представлений групп; большинство из них переносятся без изменений на случай представлений ассоциативных алгебр с единицей. Если не оговорено противное, любое представление мы будем считать конечномерным. Всюду далее ρ — представление группы G в пространстве V над полем $\Bbbk$.

Определение 12. Подпространство $U \subseteq V$ называется *инвариантным*, если $\rho(g)U \subseteq U$ для любого $g \in G$; *минимальным инвариантным подпространством* называется подпространство, минимальное (по включению) из *ненулевых* инвариантных подпространств.

Представление ρ называется *неприводимым*, если $\dim V > 0$ и любое инвариантное подпространство пространства V равно либо V, либо $\{0\}$. Если же в пространстве V есть нетривиальные инвариантные подпространства, то представление ρ называется *приводимым*.

Представление ρ называется *вполне приводимым*, если для любого инвариантного подпространства $U \subseteq V$ найдется инвариантное подпространство $W \subseteq V$ такое, что $V = U \oplus W$.

Легко понять, что любое неприводимое представление является вполне приводимым (как ни смешно это звучит).

Теорема 6 (Машке)**.** *Пусть G — конечная группа, причем* $\operatorname{char} \Bbbk$ *не делит* $|G|$. *Тогда любой конечномерное представление группы G вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть $U \subseteq V$ — инвариантное подпространство. Рассмотрим произвольное линейное отображение $\pi_0 : V \to U$, тождественное на U (проекцию вдоль некоторого дополнительного подпространства W_0). Положим

$$\pi v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\pi_0\rho(g)^{-1}v$$

для любого $v \in V$. Отображение $\pi : V \to U$ тоже линейно, тождественно на U, но ещё и *G-инвариантно*, то есть $\rho(h)\pi = \pi\rho(h)$ для любого $h \in G$. Поэтому $W = \operatorname{Ker} \pi$ является инвариантным подпространством. При этом, очевидно, $V = U \oplus W$. $\square$

Определение 13. Пусть $\Bbbk = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Скалярное произведение в V (евклидово, если $\Bbbk = \mathbb{R}$, и эрмитово, если $\Bbbk = \mathbb{C}$) называется инвариантным, если для любого $g \in G$ и любых $v, w \in V$ выполнено равенство $(\rho(g)v, \rho(g)w) = (v, w)$.

Замечание. Прямого аналога этому определению для представлений произвольной ассоциативной алгебры с единицей не существует.

Теорема 7. *Пусть G — конечная группа. Тогда в пространстве V есть инвариантное скалярное произведение.*

Доказательство. Введем в пространстве V произвольное скалярное произведение $(\ ,\ )_0$ и положим

$$(v, w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)v, \rho(g)w)_0.$$

То, что получится билинейная (полуторалинейная) форма — очевидно. То, что эта форма положительно определена — тоже (при подстановке $v = w$ получаем среднее арифметическое положительных чисел). Инвариантность полученного скалярного произведения легко проверяется. $\square$

Из этой теоремы легко следует теорема Машке (для $\Bbbk = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Действительно, легко проверить, что ортогональное дополнение к инвариантному подпространству относительно инвариантного скалярного произведения тоже является инвариантным подпространством.

Определение 14. Пусть $U \subseteq V$ — инвариантное подпространство. Тогда группа G действует на пространстве U (элемент $g \in G$ действует оператором $\rho(g)|_U$). Это представление группы G в пространстве U мы будем называть *подпредставлением* представления ρ и обозначать ρ_U. В факторпространстве V/U тоже определено представление группы G, которое мы будем обозначать $\rho_{V/U}$ и называть *факторпредставлением* ($\rho_{V/U}(g)(v+U) = \rho(g)v + U$).

Ясно, что подпредставление ρ_U является неприводимым тогда и только тогда, когда U — минимальное инвариантное подпространство.

Теорема 8. *Любое подпредставление вполне приводимого представления ρ вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть $L \subseteq V$ — инвариантное подпространство. Докажем, что представление ρ_L вполне приводимо.

Пусть $U \subseteq L$ — произвольное инвариантное подпространство. Выберем инвариантное подпространство W, дополнительное к U в V, то есть такое, что $V = U \oplus W$. Тогда $L = U \oplus (L \cap W)$, то есть $(L \cap W)$ — подпространство, дополнительное к U в L. □

Определение 15. Пусть ρ_1 и ρ_2 — представления группы G в пространствах V_1 и V_2 соответственно. *Суммой* $\rho_1 + \rho_2$ этих представлений называется представление в пространстве $V_1 \oplus V_2$, где каждый элемент $g \in G$ действует оператором $\rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$ (переводящим $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ в $(\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2)$).

Пусть ρ — представление группы G в пространстве V, а U и W — дополнительные инвариантные подпространства. Тогда, очевидно, $\rho \simeq \rho_U + \rho_W$.

Теорема 9. *Если представление ρ вполне приводимо, то оно изоморфно сумме неприводимых представлений.*

Доказательство. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что V можно разбить в прямую сумму минимальных инвариантных подпространств. Воспользуемся индукцией по размерности V. Если $\dim V = 0$, то V является прямой суммой пустого семейства минимальных инвариантных подпространств.

Пусть $\dim V > 0$ и для всех представлений группы G в пространствах меньшей размерности утверждение теоремы выполнено. Выберем в V минимальное инвариантное подпространство. Поскольку представление ρ вполне приводимо, мы можем найти инвариантное подпространство $W \subseteq V$ такое, что $V = U \oplus W$. По теореме 8 представление ρ_W вполне приводимо. Так как $\dim W < \dim V$, то W разлагается в прямую сумму минимальных инвариантных подпространств. Следовательно, это верно и для V. □

Теорема 10. *Если V можно разложить в сумму (не обязательно прямую) минимальных инвариантных подпространств, то представление ρ вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть $V = V_1 + \dots + V_k$, где V_i — минимальные инвариантные подпространства, и пусть $U \subseteq V$ — инвариантное подпространство. Найдем некоторое максимальное по включению множество индексов $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, удовлетворяющее условию $U \cap \sum\limits_{i \in I} V_i = 0$. Положим $W = \sum\limits_{i \in I} V_i$. Докажем, что $V = U \oplus W$.

Пусть V_j — одно из минимальных инвариантных подпространств, входящих в разложение $V = V_1 + \dots + V_k$. Предположим, что $V_j \nsubseteq (U + W)$. Тогда $j \notin I$ и $V_j \cap (U + W) = 0$ (поскольку V_j минимально). Но тогда $U \cap (W + V_j) = 0$, в противоречии с выбором I. Следовательно, все V_j лежат в $U + W$, так что $V = U + W$. Поскольку $U \cap W = 0$, эта сумма прямая. □

Упражнение 11. Пусть $V = V_1 + \dots + V_k$, где V_i — минимальные инвариантные подпространства. Доказать, что найдется такое подмножество $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, что $V = \bigoplus\limits_{i \in I} V_i$.

Морфизмы представлений

Определение 16. Пусть ρ_1, ρ_2 — представления группы G в пространствах V_1 и V_2 соответственно. *Морфизмом* представления ρ_1 в представление ρ_2 называется любое линейное отображение $F : V_1 \to V_2$ такое, что $F\rho_1(g) = \rho_2(g)F$ для любого $g \in G$. Морфизмы представлений иногда называют *сплетающими операторами*. Морфизм представлений называется изоморфизмом, если он имеет обратный (в смысле композиции отображений).

Теорема 11. *Если ρ_1 и ρ_2 — неприводимые представления, то любой ненулевой морфизм между ними является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $F : V_1 \to V_2$ — ненулевой морфизм представления ρ_1 в представление ρ_2. Ядро и образ морфизма являются инвариантными подпространствами, поэтому $\operatorname{Ker} F = 0$, $\operatorname{Im} F = V_2$ (так как представления неприводимы), то есть F является изоморфизмом. $\square$

Следствие 1. *Алгебра эндоморфизмов неприводимого представления является телом.*

Следствие 2 (Лемма Шура)**.** *Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то любой эндоморфизм неприводимого представления скалярен.*

Доказательство. Пусть $F : V \to V$ — эндоморфизм, λ — его собственное значение. Эндоморфизм $F - \lambda E$ необратим, поэтому он нулевой. $\square$

Из леммы Шура вытекает, что любое неприводимое представление абелевой группы одномерно. Действительно, каждый элемент абелевой группы представлен эндоморфизмом представления. Если представление неприводимо, то по лемме Шура каждый элемент группы действует скалярным оператором. Но тогда любое подпространство является инвариантным. Поэтому представление может быть неприводимым лишь если оно одномерно.

Определение 17. Представление ρ называется изотипическим, если оно изоморфно сумме нескольких экземпляров одного неприводимого представления.

Теорема 12. *Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, τ — неприводимое представление группы G в пространстве U, и $\rho = n\tau$ — изотипическое представление группы G в пространстве*

$$V = \underbrace{U \oplus \dots \oplus U}_{n},$$

которое мы отождествим с пространством $U \otimes \Bbbk^n$. Тогда любое инвариантное подпространство пространства V имеет вид $U \otimes L$, где L — подпространство пространства $\Bbbk^n$.

Доказательство. Так как сумма подпространств вида $U \otimes L$ снова является подпространством того же вида, то теорему достаточно доказать для минимальных инвариантных подпространств.

Пусть W — минимальное инвариантное подпространство. Проекция W на k-е слагаемое задает морфизм представления ρ_W в представление τ. Так как $W \neq 0$, то хотя бы один из этих морфизмов ненулевой, поэтому $\rho_W \simeq \tau$. Выберем какой-нибудь изоморфизм этих представлений $F : U \xrightarrow{\sim} W$ и возьмем композицию F с проекцией на каждое из слагаемых. По лемме Шура каждая из этих композиций — умножение на константу x_k. Рассмотрим вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Bbbk^n$ и положим $L = \langle x \rangle$. Тогда $W = U \otimes L$. $\square$

Теорема 13. *В условиях предыдущей теоремы* $\operatorname{End}(\rho) \simeq M_n(\Bbbk)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный эндоморфизм $F : V \to V$ представления ρ. Применим его к элементу вида

$$v_i(u) = (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0),$$

где u стоит на i-м месте. Получим $Fv_i(u) = (F_{i1}u, \dots, F_{in}u)$, где, очевидно, $F_{ij} \in \operatorname{End}(\tau)$. По лемме Шура F_{ij} — умножение на некоторую константу $a_{ij} \in \Bbbk$. Тогда применение эндоморфизма F к строке $(u_1, \dots, u_n)$ — это умножение ее справа на матрицу (a_{ij}). Таким образом, $\operatorname{End}(\rho) \simeq M_n(\Bbbk)$. $\square$

Аналогично доказывается следующая

Теорема 14. *Пусть $\tau_1, \dots, \tau_k$ — попарно неизоморфные неприводимые представления группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Тогда для любых неотрицательных целых чисел $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k$ линейное пространство* $\operatorname{Hom}(m_1\tau_1 + \dots + m_k\tau_k, n_1\tau_1 + \dots + n_k\tau_k)$ *естественно изоморфно пространству $M_{m_1 \times n_1}(\Bbbk) \oplus \dots \oplus M_{m_k \times n_k}(\Bbbk)$. В частности,* $\dim \operatorname{Hom}(m_1\tau_1 + \dots + m_k\tau_k, n_1\tau_1 + \dots + n_k\tau_k) = m_1 n_1 + \dots + m_k n_k$.

Заметим, что каждое вполне приводимое представление можно разложить в сумму изотипических представлений (называемых его *изотипическими компонентами*), причем это разложение определено инвариантно: докажите самостоятельно, что справедлива

Теорема 15. *Пусть ρ — вполне приводимое представление группы G в пространстве V. Для каждого неприводимого представления $\tau : G \to GL(U)$ определим V_τ как сумму образов всевозможных морфизмов представления τ в представление ρ. Тогда $V = \bigoplus_\tau V_\tau$, причем подпредставление представления ρ в V_τ изоморфно $k\tau$ для некоторого неотрицательного целого числа k.*

Размерность пространства морфизмов представления ρ_1 в представление ρ_2 иногда называется *числом сплетения* этих представлений. Мы будем обозначать число сплетения представлений ρ_1 и ρ_2 через $c(\rho_1, \rho_2)$. Из теоремы 14 следует, что для вполне приводимых представлений над алгебраически замкнутым полем имеет место равенство $c(\rho_1, \rho_2) = c(\rho_2, \rho_1)$. В частности, согласно теореме Машке, это всегда так для комплексных представлений конечной группы.

Определение 18. Пусть ρ — представление группы G в пространстве V над полем $\mathbb{R}$. *Комплексификацией* $\rho^{\mathbb{C}}$ представления ρ называется представление группы G в пространстве $V^{\mathbb{C}}$, заданное формулой $\rho^{\mathbb{C}}(g) = \rho(g)^{\mathbb{C}}$ для любого $g \in G$.

Теорема 16. *Пусть ρ_1 и ρ_2 — вполне приводимые вещественные представления группы G в пространствах V_1 и V_2 соответственно. Тогда имеет место равенство $c(\rho_1^{\mathbb{C}}, \rho_2^{\mathbb{C}}) = c(\rho_1, \rho_2)$.*

Доказательство. Подпространство $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2)$ задается системой линейных уравнений $\rho_2(g)X = X\rho_1(g)$, где g пробегает группу G. Подпространство $\mathrm{Hom}(\rho_1^{\mathbb{C}}, \rho_2^{\mathbb{C}}) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}) \simeq (\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2))^{\mathbb{C}}$ задается комплексифицированной системой линейных уравнений $\rho_2(g)^{\mathbb{C}}X = X\rho_1(g)^{\mathbb{C}}$. Комплексная размерность пространства решений комплексифицированной системы равна вещественной размерности пространства решений исходной системы (так как они записываются одной и той же матрицей). □

Отсюда следует, что и для вещественных представлений конечной группы G имеет место равенство $c(\rho_1, \rho_2) = c(\rho_2, \rho_1)$. Аналогично, с использованием тензорного умножения на поле $\mathbb{C}$, это равенство доказывается для представлений над любым подполем поля $\mathbb{C}$.

Операции над представлениями

Для получения достаточного количества представлений нужно уметь строить новые представления из старых.

Определение 19. Пусть G — группа, а $\rho : G \to GL(V)$ и $\tau : G \to GL(W)$ — ее линейные представления. Определим отображения $\rho^* : G \to GL(V)^*$, $\rho \oplus \tau : G \to GL(V \oplus W)$ и $\rho \otimes \tau : G \to GL(V \otimes W)$ следующими формулами: $\rho^*(g) = \big((\rho(g))^*\big)^{-1}$, $(\rho \oplus \tau)(g) = \rho(g) \oplus \tau(g)$ и $(\rho \otimes \tau)(g) = \rho(g) \otimes \tau(g)$. Ясно, что отображения ρ^*, $\rho \oplus \tau$ и $\rho \otimes \tau$ являются линейными представлениями. Они называются *двойственным представлением* к ρ, *прямой суммой* представлений ρ и τ и *тензорным произведением* представлений ρ и τ, соответственно.

Аналогично определяются *k-я симметрическая степень* $S^k\rho : G \to GL(S^kV)$ и *k-я внешняя степень* $\Lambda^k\rho : G \to GL(\Lambda^kV)$ представления ρ.

Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп, и ρ — представление группы H в пространстве V. Тогда $\rho \circ \varphi$ — представление группы G в том же пространстве. Рассмотрим некоторые частные случаи этой конструкции.

1. Пусть G — подгруппа группы H и φ — вложение. Тогда $\rho \circ \varphi$ — *ограничение представления ρ на подгруппу группы H*.

2. Пусть $G = H$ и φ — автоморфизм. Тогда $\rho \circ \varphi$ — представление той же группы, что и ρ. Говорят, что оно получается *подкручиванием* представления ρ на автоморфизм φ. Таким образом, получается (правое) действие группы $\mathrm{Aut}(G)$ на множестве классов изоморфизма представлений группы G.

3. Пусть $N \lhd G$, $H = G/N$ и φ — каноническая проекция. Тогда представление $\rho\circ\varphi$ называется *поднятием* представления ρ. Представление $\rho \circ \varphi$ обладает тем свойством, что подгруппа N содержится в его ядре. Легко видеть, что и наоборот, всякое представление группы G, ядро которого содержит N, представляется в виде $\rho \circ \varphi$ для некоторого представления ρ группы H, то есть *факторизуется* через представление факторгруппы.

   Например, коммутант G' группы G, очевидно, содержится в ядре каждого одномерного представления этой группы. Поэтому классы изоморфизма одномерных представлений группы G находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами изоморфизма неприводимых представлений *абелианизации* G/G' группы G.

Регулярные и квазирегулярные представления конечной группы

Определение 20. Для конечной группы G рассмотрим линейное пространство $\Bbbk G$ всех формальных линейных комбинаций элементов группы. На базисе пространства $\Bbbk G$ определено ассоциативное умножение (групповая операция); распространяя её по дистрибутивности на всё пространство $\Bbbk G$, получаем на нём структуру ассоциативной алгебры с единицей. Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G.

Представление конечной группы и ее групповой алгебры — это, в некотором смысле, одно и то же. А именно, пусть ρ — представление конечной группы G в пространстве V. Для каждого элемента $\sum \lambda_g g \in \Bbbk G$ положим $\tau(\sum \lambda_g g) = \sum \lambda_g \rho(g)$. Ясно, что таким образом получается представление групповой алгебры в том же пространстве V. Наоборот, если у нас есть представление τ групповой алгебры $\Bbbk G$ в пространстве V, то представление ρ группы G получается ограничением τ на $G \subset \Bbbk G$.

Определение 21. *Левым регулярным представлением* группы G называется ее представление в пространстве $\Bbbk G$, где каждый элемент $g \in G$ представлен оператором левого умножения на g в алгебре $\Bbbk G$. *Правым регулярным представлением* группы G называется ее представление в пространстве $\Bbbk G$, где каждый элемент $g \in G$ представлен оператором правого умножения на g^{-1} в алгебре $\Bbbk G$.

Теорема 17. *Каждое неприводимое представление $\rho : G \to GL(V)$ группы G изоморфно фактор-представлению ее левого регулярного представления.*

Доказательство. Обозначим левое регулярное представление группы G через λ. Пусть $v \in V$ — ненулевой вектор. Рассмотрим линейное отображение $\varphi : \Bbbk G \to V$, переводящее каждый базисный вектор $g \in G \subset \Bbbk G$ в $\rho(g)v$. Легко проверить, что это отображение является морфизмом представления λ в представление ρ. Так как $\varphi \neq 0$, то $\varphi(\Bbbk G) = V$, так что $\rho \simeq \lambda_{\Bbbk G/W}$, где $W = \ker \varphi$. □

В частности, любое комплексное неприводимое представление группы G входит в разложение левого регулярного представления этой группы (то есть соответствующая изотипическая компонента не равна нулю).

Определение 22. Пусть X — множество, на котором группа G действует слева. Рассмотрим пространство $\Bbbk X$, базисом которого является множество X. Определим представление λ_X группы G в пространстве $\Bbbk X$ формулой $\lambda_X(g) \sum a_x x = \sum a_x gx$. Такое представление называется *квазирегулярным.*

Ясно, что представление λ_X распадается в сумму подпредставлений, отвечающих разным орбитам действия группы G на X.

Теорема 18. *Пусть X и Y — однородные G-пространства, то есть группа G действует на множествах X и Y транзитивно. Выберем по элементу из этих множеств $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ и положим $H = G_{x_0}$, $K = G_{y_0}$ (стабилизаторы точек x_0 и y_0). Тогда число сплетения $c(\lambda_X, \lambda_Y)$ равно числу двойных смежных классов, то есть различных множеств вида HgK, где $g \in G$.*

Доказательство. Пусть $\varphi : \Bbbk X \to \Bbbk Y$ — сплетающий оператор и пусть $\varphi(x_0) = \sum\limits_{y \in Y} b_y y$. Тогда для любого $h \in H$ мы имеем

$$\sum_{y \in Y} b_y y = \varphi(x_0) = \varphi(hx_0) = \lambda_Y(h)\varphi(x_0) = \sum_{y \in Y} b_y hy.$$

Отсюда мы получаем, что $b_y = b_{hy}$ для любых $h \in H$ и $y \in Y$, то есть что коэффициенты b_y постоянны на H-орбитах во множестве Y. При этом набором коэффициентов b_y оператор φ определяется однозначно: $\varphi(gx_0) = \sum\limits_{y \in Y} b_y gy$.

Пусть теперь $f : Y \to \Bbbk$ — произвольная функция, постоянная на H-орбитах. Выберем для каждого $x \in X$ элемент $g_x \in G$ такой, что $x = g_x x_0$, и положим $\psi(x) = \sum\limits_{y \in Y} f(y) g_x y$. Из того, что функция f постоянна на H-орбитах, следует, что это определение корректно. Продолжим ψ по линейности до оператора $\Bbbk X \to \Bbbk Y$. Очевидно, что это сплетающий оператор. Поэтому $c(\lambda_X, \lambda_Y)$ равно числу H-орбит в Y.

Но $Y \simeq G/K$ как множество с действием группы G, а смежные классы $g_1 K$ и $g_2 K$ лежат в одной H-орбите тогда и только тогда, когда $Hg_1K = Hg_2K$. Поэтому $c(\lambda_X, \lambda_Y) = \#(H \backslash G/K)$. □

Следующие два примера взяты из книги А. А. Кириллова “Элементы теории представлений”.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу:

> В математическом институте лежала модель куба. Один из сотрудников занумеровал грани куба числами $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Другой, придя в институт на следующий день, заменил каждое число на среднее арифметическое соседних чисел. Первый, заметив это, на другой день ответил тем же. Какие числа окажутся на гранях куба через месяц, если известно, что оба сотрудника ходят в институт через день?

Решение этой шуточной задачи является моделью применения теории представлений к различным задачам математики, механики и физики, обладающим той или иной симметрией.

Обозначим через V_{f} пространство комплекснозначных функций на множестве граней куба. Это пространство мы можем отождествить с пространством $\mathbb{C}X_{\mathrm{f}}$, где X_{f} — множество граней куба. Множество X_{f} является однородным G-пространством, где G — группа вращений куба (изоморфная S_4), поэтому в пространстве V_{f} определено квазирегулярное представление λ_{f} группы G.

По теореме 14 число сплетения $c(\lambda_{\mathrm{f}}, \lambda_{\mathrm{f}})$ равно сумме квадратов кратностей вхождения в λ_{f} неизоморфных неприводимых представлений группы G. С другой стороны, число сплетения $c(\lambda_{\mathrm{f}}, \lambda_{\mathrm{f}})$ равно числу орбит стабилизатора выбранной грани куба на множестве X_{f}. Таких орбит, очевидно, три: выбранная грань, смежные с ней грани и противоположная грань. Отсюда вытекает, что ни у какого неприводимого представления группы G кратность его вхождения в λ_{f} не превосходит 1, и что V_{f} является суммой трех изотипических компонент (являющихся минимальными инвариантными подпространствами).

Однако разложение V_{f} в прямую сумму трех инвариантных подпространств легко указать. Пусть V_1 — пространство постоянных функций. Ясно, что это инвариантное подпространство. Эрмитово скалярное произведение на V_{f}, для которого грани образуют ортонормированный базис, является, очевидно, инвариантным. Поэтому $V_1^{\perp}$ — пространство функций с нулевой суммой значений — тоже инвариантное подпространство. Назовем функцию на множестве граней куба четной, если она принимает на противоположных гранях одинаковые значения, и нечетной, если она принимает на противоположных гранях противоположные значения. Пространства V_e, состоящее из всех четных функций, и V_o, состоящее из всех нечетных функций, тоже являются инвариантными подпространствами. Пусть $V_2 = V_e \cap V_1^{\perp}$ (пространство четных функций с нулевой суммой значений) и $V_3 = V_o$. Ясно, что эти подпространства инвариантны и $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Поэтому подпредставления представления λ_{f} в подпространствах V_1, V_2 и V_3 неприводимы. Обозначим их через ρ_1, ρ_2 и ρ_3 соответственно.

Рассмотрим оператор L в пространстве V_{f}, переводящий функцию $f(x)$ в $(Lf)(x) = \frac{1}{4}\sum f(y)$, где суммирование ведется по четырем граням y, соседним с гранью x. Ясно, что оператор L перестановочен с действием группы G. Поэтому ограничение оператора L на каждое из подпространств V_i сводится к умножению на константу a_i.

Очевидно, что $a_1 = 1$. В качестве представителя пространства V_2 можно взять функцию, равную 1 на одной паре противоположных граней, -1 на другой и 0 на третьей. Отсюда вытекает, что $a_2 = -1/2$. Наконец, в качестве представителя пространства V_3 можно взять функцию, равную 1 на одной грани, -1 на противоположной грани и 0 на остальных. Отсюда $a_3 = 0$.

Пусть f — исходная функция (принимающая значения $1, 2, 3, 4, 5, 6$ на разных гранях). То, что будет написано на гранях куба через месяц, имеет вид $L^{30} f = a_1^{30}\pi_1(f) + a_2^{30}\pi_2(f) + a_3^{30}\pi_3(f) = 3,5 + \pi_2(f)/2^{30}$, где через π_i обозначен оператор проекции на V_i. Поскольку проекция f на V_2 имеет длину не больше, чем $\|f - \pi_1(f)\| = \sqrt{17,5}$, мы получаем, что на каждой грани куба через месяц будет написано число, отличающееся от $3,5$ не более, чем на $\sqrt{17,5}/2^{30} \approx 0,000000004$.

Пример 2. Рассматривая другие однородные пространства для группы куба, можно построить полную систему ее неприводимых представлений. Пусть

X_{f} — множество граней куба;

X_{v} — множество вершин куба;

X_{d} — множество больших диагоналей куба;

X_{t} — множество правильных тетраэдров с вершинами в вершинах куба;

X_{c} — множество центров куба.

Пространства функций на этих множествах мы обозначим через V_{f}, V_{v}, V_{d}, V_{t}, V_{c}. Их размерности равны 6, 8, 4, 2, 1 соответственно. Числа сплетения между соответствующими квазирегулярными представлениями легко найти (так же, как мы нашли $c(\lambda_{\mathrm{f}}, \lambda_{\mathrm{f}})$). Они сведены в следующую таблицу:

	λ_{f}	λ_{v}	λ_{d}	λ_{t}	λ
λ_{f}	3	2	1	1	1
λ_{v}	2	4	2	2	1
λ_{d}	1	2	2	1	1
λ_{t}	1	2	1	2	1
λ_{c}	1	1	1	1	1

Посмотрим, какие выводы можно сделать из этой таблицы. Прежде всего, из вида диагональных чисел следует, что λ_{c} — неприводимое представление (это, впрочем, ясно уже из того, что пространство V_{c} одномерно), λ_{d} и λ_{t} являются суммами двух неизоморфных неприводимых представлений, λ_{f} — трех неизоморфных неприводимых представлений, а для λ_{v} есть две возможности — либо сумма двух изоморфных неприводимых представлений, либо сумма четырех неизоморфных неприводимых представлений. Первая из этих возможностей отпадает, так как в этом случае $c(\lambda_{\mathrm{v}}, \lambda_{\mathrm{c}})$ не могло бы равняться 1.

Далее из таблицы следует, что λ_{c} входит в остальные модули с кратностью 1. Мы уже видели, что λ_{f} является суммой своих подпредставлений $\rho_1 \simeq \lambda_{\mathrm{c}}$, ρ_2 и ρ_3. Продолжая эти рассуждения, легко получаем, что имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathrm{f}} &\simeq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3,\\
\lambda_{\mathrm{v}} &\simeq \rho_1 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5,\\
\lambda_{\mathrm{d}} &\simeq \rho_1 + \rho_4,\\
\lambda_{\mathrm{t}} &\simeq \rho_1 + \rho_5,\\
\lambda_{\mathrm{c}} &\simeq \rho_1,
\end{aligned}$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 — попарно неизоморфные неприводимые представления группы G размерностей 1, 2, 3, 3 и 1 соответственно. Размерности представлений находятся из системы уравнений

$$\dim \lambda_{\mathrm{f}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_2 + \dim \rho_3, \tag{1}$$
$$\dim \lambda_{\mathrm{v}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_3 + \dim \rho_4 + \dim \rho_5, \tag{2}$$
$$\dim \lambda_{\mathrm{d}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_4, \tag{3}$$
$$\dim \lambda_{\mathrm{t}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_5, \tag{4}$$
$$\dim \lambda_{\mathrm{c}} = \dim \rho_1. \tag{5}$$

Отметим, что для любого квазирегулярного представления λ_X имеет место равенство $c(\lambda_X, \lambda) = c(\lambda, \lambda_X) = |X| = \dim \lambda_X$, где λ — левое регулярное представление группы G. Поскольку $c(\sum \rho_i, \lambda) = \sum c(\rho_i, \lambda)$, когда ρ_i — неизоморфные неприводимые представления, то $c(\rho_i, \lambda)$ удовлетворяют той же системе уравнений 1, что и $\dim \rho_i$. Поэтому $c(\rho_i, \lambda) = \dim \rho_i$ для любого $i = 1, \ldots, 5$, то есть каждое из этих неприводимых представлений входит в левое регулярное представление с той же кратностью, какова его размерность. Следовательно, сумма соответствующих изотипических компонент левого регулярного представления имеет размерность $\sum\limits_{i=1}^{5} (\dim \rho_i)^2$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{5} (\dim \rho_i)^2 = 24 = |G| = \dim \lambda$, то в λ не входит больше никакое неприводимое представление группы G. Поэтому $\rho_1, \ldots, \rho_5$ — все неприводимые представления группы G (с точностью до изоморфизма).