

Семинар 9. Характеры.

Рассматриваемые группы предполагаются конечными, а представления рассматриваются только над полем комплексных чисел.

Задача 1. Выпишите таблицу характеров для (а) симметрической группы S_3 ; (б) знакопеременной группы A_4 ; (с) группы диэдра D_5 .

Задача 2. Цель данной задачи – выписать таблицу характеров для S_4 :

(а) Выпишите классы сопряженности для S_4 ;

(б) Опишите одномерные представления S_4 и их характеры;

(с) Докажите, что перестановочное 4-мерное представление, в котором S_4 действует перестановками базисных векторов, есть прямая сумма одномерного тривиального и 3-мерного неприводимого (которое называется симплициальным); вычислите его характер;

(д) воспользовавшись сюръективным гомоморфизмом $S_4 \rightarrow S_3$, найдите неприводимое 2-мерное представление S_4 и выпишите его характер;

(е) найдите размерности всех неприводимых представлений и дозаполните таблицу характеров для S_4 . Знаете ли вы геометрическую реализацию недостающего представления? Можно ли найти его характер, используя только ортогональность характеров?

Задача 3. Напомним, что группа вращений куба изоморфна S_4 . Разложите на неприводимые следующие перестановочные представления группы S_4 , происходящие из действия S_4 на множествах (а) вершин; (б) рёбер; (с) граней куба.

Задача 4. Пусть в комплексных пространствах U и V заданы неприводимые представления группы G , причем U одномерно. Докажите двумя способами, что представление группы G в $U \otimes V$ тоже неприводимо: явно и с использованием характеров (вычислите скалярное произведение $(\chi_{U \otimes V}, \chi_{U \otimes V})$).

Задача 5. Пусть в V задано представление группы G . Докажите, что характеры симметрического и внешнего квадрата этого представления (в S^2V и Λ^2V , соответственно) вычисляются по следующим формулам:

$$(a) \chi_{S^2V}(g) = \frac{\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)}{2}; \quad (b) \chi_{\Lambda^2V}(g) = \frac{\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)}{2}.$$

Задача 6. Выпишите таблицу характеров группы A_5 .

Указание: покажите, используя характеры, что все нетривиальные неприводимые представления можно получить из симплициального и разложения на неприводимые его внешнего и симметрического квадратов.