Семинар 8. Групповая алгебра.

Задача 1. Пусть G — конечная группа, и пусть V — комплексный конечномерный G-модуль (то есть левый модуль над групповой алгеброй $\mathbb{C}G$). Предположим, что пространство его эндоморфизмов 3-мерно. Докажите, что V есть прямая сумма 3-х неизоморфных простых G-модулей.

Задача 2. Вычислите размерность пространства G-эндоморфизмов групповой алгебры $\Bbbk G$. Постройте на ней структуру алгебры и проясните связь с групповой алгеброй $\Bbbk G$, если таковая имеется.

Задача 3. Пусть G – конечная неабелева группа. Докажите, что над $\mathbb{C}$

(a) G имеет по крайней мере 1 неодномерное представление;

(b) G имеет не менее 3 неизоморфных представлений;

(c) размерность неприводимого представления не превосходит $\sqrt{n-2}$.

Задача 4. Найдите число неприводимых комплексных представлений и их размерности для **(a)** $G = \mathbb{S}_3$; **(b)** $G = D_4$; **(c)** $G = D_5$.

Задача 5. Постройте явно изоморфизм групповой алгебры $\mathbb{C}G$ и прямой суммы матричных алгебр для **(a)** $G = \mathbb{Z}_n$, **(b)** $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; **(c)** $G = D_4$.