Семинар 7. **Полупростота.**

Задача 1. Докажите, что у матричной алгебры $Mat_n(\mathbb{C})$ есть единственное неприводимое представление. Какова его размерность? Сколько неприводимых представлений у суммы двух матричных алгебр $Mat_n(\mathbb{C}) \oplus Mat_m(\mathbb{C})$.

Задача 2. Пусть есть короткая точная последовательность $0 \to M \to N \to K \to 0$ комплексных конечномерных представлений конечной группы G. Докажите, что

(a) G-инварианты этих представлений тоже образуют короткую точную последовательность $0 \to [M]^G \to [N]^G \to [K]^G \to 0$;

(b) Для любого неприводимого представления L имеются две короткие точные последовательности $0 \to Hom_G(L, M) \to Hom_G(L, N) \to Hom_G(L, K) \to 0$ и $0 \to Hom_G(K, L) \to Hom_G(N, L) \to Hom_G(M, L) \to 0$.

Задача 3. Сколько **(a)** неприводимых **(b)** неэквивалентных комплексный представлений размерности n имеет абелева группа G.

Задача 4. (*алгебра Клиффорда*) Пусть V – конечномерное комплексное векторное пространство снабженное симметричной билинейной формой q(-,-). Алгеброй Клиффорда $Cl(q)$ называется фактор-алгебра свободной (тензорной) алгебры TV по идеалу, порожденному квадратичными соотношениями: $v \otimes v - q(v, v)1$, $v \in V$. В частности, если $e_1 \dots e_n$ – базис в V, то определяющие соотношения в $Cl(q)$ имеют вид:

$$e_i e_j + e_j e_i = 2a_{ij}, \quad e_i e_i = a_{ii}$$

Покажите, что

(a) если форма $q(,) = 0$, то $Cl(q)$ изоморфна алгебре Грассмана ΛV;

(b) $\dim_{\mathbb{C}} CL(q) \leqslant 2^{\dim V} = \dim \Lambda V$.

Указание. Докажите, что множество мономов $\{e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} | i_1 > i_2 > \dots\}$ линейно порождает $CL(q)$;

(c) $[\dim V = 2k]$ Пусть в V выбран базис $\{x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k\}$, такой что $q(x_i, x_j) = q(y_i, y_j) = 0$ и $q(x_i, y_j) = \delta_{ij}/2$. Покажите, что алгебра Грассмана ΛW (где $W = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$) образует представление $CL(q)$, в котором x_i действуют посредством умножения на x_i, а y_i посредством дифференцирования вдоль x_i:

$$\begin{gathered} \rho(x_i)(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) := x_i \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \\ \rho(y_i)(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) := \sum_{s=1}^k (-1)^s \delta_{i,i_s} x_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x_{i_s}} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) \end{gathered} \tag{1}$$

Покажите, что данное представление неприводимо.

(d) $[\dim V = 2k + 1]$ Пусть V имеет базис $\{x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k; z\}$ такой что $q(x_i, x_j) = q(y_i, y_j) = q(x_i, z) = q(y_i, z) = 0$, $q(x_i, y_j) = \delta_{ij}/2$, $q(z, z) = 1$. Как и раньше обозначим за W линейную оболочку $\{x_1, \dots, x_k\}$ и определим два различных действия $Cl(q)$ на ΛW, которые будем обозначать за ρ_+ и ρ_- соответственно. Ограничение ρ_+ и ρ_- на образующие x_i и y_i совпадает с ρ, построенным в (2), кроме того

$$\begin{gathered} \rho_+(z)(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) := (-1)^k x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \\ \rho_-(z)(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) := (-1)^{k+1} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} \end{gathered}$$

Покажите, что ρ_+ и ρ_- – пара неизоморфных неприводимых представлений $Cl(q)$.

(e) покажите, что если билинейная форма $q(,)$ – невырождена, что $\dim_{\mathbb{C}} CL(q) = 2^{\dim_{\mathbb{C}} V}$. Покажите, что алгебра Клиффорда полупроста. Более того, $Cl(q)$ изоморфно матричной алгебре для четной размерности V и сумме двух матричных алгебр, если размерность V нечетна.

(f) Опишите все неприводимые представления алгебры Клиффорда $Cl(q)$ для невырожденного спаривания $q()$.

Семинар 7. **Полупростота.**

Задача 1. Докажите, что у матричной алгебры $Mat_n(\mathbb{C})$ есть единственное неприводимое представление. Какова его размерность? Сколько неприводимых представлений у суммы двух матричных алгебр $Mat_n(\mathbb{C}) \oplus Mat_m(\mathbb{C})$.

Задача 2. Пусть есть короткая точная последовательность $0 \to M \to N \to K \to 0$ комплексных конечномерных представлений конечной группы G. Докажите, что

(a) G-инварианты этих представлений тоже образуют короткую точную последовательность $0 \to [M]^G \to [N]^G \to [K]^G \to 0$;

(b) Для любого неприводимого представления L имеются две короткие точные последовательности $0 \to Hom_G(L, M) \to Hom_G(L, N) \to Hom_G(L, K) \to 0$ и $0 \to Hom_G(K, L) \to Hom_G(N, L) \to Hom_G(M, L) \to 0$.

Задача 3. Сколько **(a)** неприводимых **(b)** неэквивалентных комплексный представлений размерности n имеет абелева группа G.

Задача 4. (*алгебра Клиффорда*) Пусть V – конечномерное комплексное векторное пространство снабженное симметричной билинейной формой $q(\text{-},\text{-})$. Алгеброй Клиффорда $Cl(q)$ называется фактор-алгебра свободной (тензорной) алгебры TV по идеалу, порожденному квадратичными соотношениями: $v \otimes v - q(v, v)1$, $v \in V$. В частности, если $e_1 \dots e_n$ – базис в V, то определяющие соотношения в $Cl(q)$ имеют вид:

$$e_i e_j + e_j e_i = 2a_{ij}, \quad e_i e_i = a_{ii}$$

Покажите, что

(a) если форма $q(,) = 0$, то $Cl(q)$ изоморфна алгебре Грассмана ΛV;

(b) $\dim_{\mathbb{C}} CL(q) \leqslant 2^{\dim V} = \dim \Lambda V$.

Указание. Докажите, что множество мономов $\{e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} | i_1 > i_2 > \dots\}$ линейно порождает $CL(q)$;

(c) $[\dim V = 2k]$ Пусть в V выбран базис $\{x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k\}$, такой что $q(x_i, x_j) = q(y_i, y_j) = 0$ и $q(x_i, y_j) = \delta_{ij}/2$. Покажите, что алгебра Грассмана ΛW (где $W = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$) образует представление $CL(q)$, в котором x_i действуют посредством умножения на x_i, а y_i посредством дифференцирования вдоль x_i:

$$\begin{gathered} \rho(x_i)(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) := x_i \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \\ \rho(y_i)(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) := \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \delta_{i,i_s} x_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x_{i_s}} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) \end{gathered} \tag{2}$$

Покажите, что данное представление неприводимо.

(d) $[\dim V = 2k + 1]$ Пусть V имеет базис $\{x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k; z\}$ такой что $q(x_i, x_j) = q(y_i, y_j) = q(x_i, z) = q(y_i, z) = 0$, $q(x_i, y_j) = \delta_{ij}/2$, $q(z, z) = 1$. Как и раньше обозначим за W линейную оболочку $\{x_1, \dots, x_k\}$ и определим два различных действия $Cl(q)$ на ΛW, которые будем обозначать за ρ_+ и ρ_- соответственно. Ограничение ρ_+ и ρ_- на образующие x_i и y_i совпадает с ρ, построенным в (2), кроме того

$$\begin{gathered} \rho_+(z)(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) := (-1)^k x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \\ \rho_-(z)(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}) := (-1)^{k+1} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} \end{gathered}$$

Покажите, что ρ_+ и ρ_- – пара неизоморфных неприводимых представлений $Cl(q)$.

(e) покажите, что если билинейная форма $q(,)$ – невырождена, что $\dim_{\mathbb{C}} CL(q) = 2^{\dim_{\mathbb{C}} V}$. Покажите, что алгебра Клиффорда полупроста. Более того, $Cl(q)$ изоморфно матричной алгебре для четной размерности V и сумме двух матричных алгебр, если размерность V нечетна.

(f) Опишите все неприводимые представления алгебры Клиффорда $Cl(q)$ для невырожденного спаривания $q()$.